Teorema di convergenza locale del metodo delle tangenti

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $\alpha \in (a, b)$ con $f(\alpha) = 0$. Se $f'(\alpha) \neq 0$ (α è una radice semplice),

- il metodo delle tangenti è localmente convergente, cioè $\exists \rho > 0 \ . \ \forall x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \ .$ la successione generata da $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ è tale che $\forall k \ . \ x_k \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ e $\lim x_k = \alpha$;
- la convergenza è almeno quadratica se $x_k \neq \alpha$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Convergenza locale

Per il teorema della permanenza del segno,

$$f'(\alpha) \neq 0 \quad \implies \quad \exists \delta > 0 \ . \ \forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \ . \ f'(x) \neq 0,$$

perciò

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

è ben definita su $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Visto che $f \in C^2$, in questo intorno g è C^1. Visto che

$$g'(\alpha) = \frac{\overbrace{f(\alpha)}^{= 0 \text{ (hp)}} \ f''(\alpha)}{\underbrace{f'(\alpha)^2}_{\neq 0 \text{ (hp)}}} = 0 < 1,$$

per il corollario al teorema del punto fisso il metodo converge localmente.

Ordine di convergenza

Consideriamo lo sviluppo di Taylor di f in x_k:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + f''(z_k)\frac{(x - x_k)^2}{2} \qquad |z_k - x| \leq |x_k - x| \,.$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &= f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + f''(z_k)\frac{(\alpha - x_k)^2}{2} \\ &= \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \alpha - x_k + \frac{f''(z_k)}{f'(x_k)}\frac{(\alpha - x_k)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}} - \alpha = \frac{f''(z_k)}{f'(x_k)}\frac{(\alpha - x_k)^2}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{f''(z_k)}{2f'(x_k)} \right| \overset{\substack{f', f'' \text{ cont.} \\ x_k, z_k \to \alpha}}{=} \left| \frac{f''(\alpha)}{2\underbrace{f'(\alpha)}_{\neq 0}} \right| \in \mathbb{R}$$

Se $f''(\alpha) \neq 0$ l'ordine di convergenza è 2, altrimenti è maggiore.