Metodo di Jacobi

Metodo iterativo per la risoluzione di sistemi lineari.

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i < j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A = D - L - U \qquad M = D \quad N = L + N$$

La matrice di iterazione è $J = D^{-1}(L + U)$, ma non c'è bisogno di costruirla (né di trovare M, M^{-1}, N) per applicare il metodo – possiamo usare la formula:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Il metodo quindi è applicabile se $\forall i \,.\, a_{ii} \neq 0$.

A differenza di Gauss-Seidel è facilmente parallelizzabile: si possono calcolare contemporaneamente tutte le componenti di $x^{(k+1)}$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b \\ M x^{(k+1)} &= N x^{(k)} + b \\ D x^{(k+1)} &= (L + U) x^{(k)} + b \end{aligned}$$

È un sistema lineare, e scrivendo l'equazione di ogni riga per esteso si ottiene la formula.