Calcolo dell'errore inerente

Se f è di classe C^2,

$$\epsilon_{\text{in}} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \quad \doteq \quad \underbrace{x\frac{f'(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{coefficiente di}\\ \text{amplificazione}}} \quad \epsilon_x$$

In più variabili: $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\epsilon_{\text{in}} \doteq \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} \epsilon_{x_i} \qquad c_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Gli errori di rappresentazioni sono limitati dalla precisione di macchina u, ma i coefficienti di amplificaizione possono divergere (problema mal condizionato).

Dimostrazione

Per la formula di Taylor con resto di Lagrange,

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x} - x) + \frac{f''(z)}{2}(\tilde{x} - x)^2$$

per qualche z tra x e $\tilde{x}$.

Allora:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\text{in}} &= \frac{\cancel{f(x)} + f'(x)(\tilde{x} - x) + \frac{f''(z)}{2}(\tilde{x} - x)^2 - \cancel{f(x)}}{f(x)} \\
&\overset{\cdot\frac{x}{x}}{\doteq} x\frac{f'(x)}{f(x)}\epsilon_x + x\frac{f''(z)(\tilde{x} - x)}{2f(x)}\epsilon_x \\
&= x\frac{f'(x)}{f(x)}\epsilon_x + x^2\frac{f''(z)}{2f(x)}\epsilon_x^2 \\
&\doteq x\frac{f'(x)}{f(x)}\epsilon_x.
\end{aligned}$$