Metodo di bisezione

Metodo iterativo per la risoluzione di equazioni non lineari.

BISECT(f, a_0, b_0)

for $k = 1, 2, \dots$
    $c_k = (a_k + b_k)/2$

    if $f(c_k)f(a_k) \leq 0$
        $a_{k+1} = a_k$
        $b_{k+1} = c_k$
    else
        $a_{k+1} = c_k$
        $b_{k+1} = b_k$

Convergenza

Teorema: data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua e con $f(a)f(b) < 0$, per le successioni generate dal metodo di bisezione vale:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{k \to \infty} c_k = \alpha$$

con α tale che $f(\alpha) = 0$.
Quindi sotto queste ipotesi il metodo converge sempre (ad una delle radici).

Condizione di arresto

Osserviamo che:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = \frac{b - a}{2^k}.$$

Se vogliamo una soluzione approssimata a meno di ϵ, cioè $|\tilde{\alpha} - \alpha| < \epsilon$,

$$\left| \underbrace{\frac{a_k + b_k}{2}}_{\tilde{\alpha}} - \alpha \right| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}} < \epsilon$$

$$k > \log_2 \frac{b - a}{\epsilon} - 1$$

Per via dell'errore introdotto dalle operazioni di macchina è opportuno scegliere ϵ non troppo piccolo e imporre un limite massimo al numero di iterazioni.