Condizione sufficiente per la convergenza di Jacobi e Gauss-Seidel

Se A è una matrice a predominanza diagonale (per righe o colonne), cioè

$$\forall i \;.\; |a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(analogo per le colonne)}$$

allora:

- A è invertibile;
- Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili;
- Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.

Il teorema è utile perché non richiede il calcolo della matrice di iterazione, che è richiesta dagli altri criteri (ma non per l'applicazione dei due metodi).

Dimostrazione

- se A è a predominanza diagonale, 0 non appartiene ai cerchi di Gershgorin:

  $$|a_{ii} - 0| = |a_{ii}| \not\leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

  perché è sempre strettamente maggiore. Quindi 0 non è un autovalore, e A è invertibile.

- i metodi sono applicabili se e solo se $\forall i \;.\; a_{ii} \neq 0$. Se $a_{ii} = 0$ per qualche i, allora avremmo:

  $$|a_{ii}| = 0 > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq 0,$$

  cioè $0 > 0$, che è assurdo.

- i metodi sono convergenti se e solo se $\rho(P) < 1$. Supponiamo per assurdo che non lo siano, cioè $\exists \lambda \;.\; |\lambda| \geq 1$. Allora:

  $$\begin{aligned}
  \det(P - \lambda I) &= 0 \\
  \det(M^{-1}N - \lambda I) &= \det(M^{-1}N - \lambda M^{-1}M) \\
  &= \det(-M^{-1}(\lambda M - N)) \\
  &= \det(-M^{-1}) \det(\underbrace{\lambda M - N}_{H}),
  \end{aligned}$$

  che è 0 se e solo se $\det(H) = 0$.

  Ma H è a predominanza diagonale:

  Jacobi $H = \lambda D - L - U$, cioè A con gli elementi sulla diagonale moltiplicati per λ, e:

  $$|\lambda a_{ii}| = \underbrace{|\lambda|}_{\geq 1} |a_{ii}| \geq |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \,.$$

  Gauss-Seidel $H = \lambda(D - L) - U$, cioè A con gli elementi sotto la diagonale (compresa) moltiplicati per λ, e:

  $$\begin{aligned}
  |a_{ii}| &> \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \\
  |a_{ii}| &> \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\
  |\lambda| \, |a_{ii}| &> |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \, |\lambda| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \\
  |\lambda a_{ii}| &> \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \qquad\qquad |\lambda| \geq 1
  \end{aligned}$$

  Visto che H è a predominanza diagonale, allora è invertibile, ma $\det(H) = 0$ – assurdo.