Norma matriciale indotta da una norma vettoriale

$$\left\|\cdot\right\|_{\mathrm{M}} : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n$$

$$\left\|A\right\|_{\mathrm{M}} = \max_{\substack{v\in\mathbb{F}^n \\ \left\|v\right\|_{\mathrm{v}}=1}} \left\|Av\right\|_{\mathrm{v}}$$

Il massimo esiste perché la norma è una funzione continua e $\left\{v \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \left\|v\right\|_{\mathrm{v}} = 1\right\}$ è un insieme compatto.

$\left\|\cdot\right\|_{\mathrm{M}}$ è una norma matriciale. Le prime tre proprietà valgono perché le ha $\left\|\cdot\right\|_{\mathrm{v}}$.

Vale che $\left\|I\right\|_{\mathrm{M}} = 1$:

$$\left\|I\right\|_{\mathrm{M}} = \max_{\left\|v\right\|_{\mathrm{v}}=1} \left\|Iv\right\|_{\mathrm{v}} = \max_{\left\|v\right\|_{\mathrm{v}}=1} \left\|v\right\|_{\mathrm{v}} = 1$$