Metodo di Gauss-Seidel

Metodo iterativo per la risoluzione di sistemi lineari.

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i > j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i < j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$A = D - L - U \qquad M = D - L = \texttt{tril(A)} \quad N = U = -\texttt{triu(A,1)}$$

La matrice di iterazione è $G = (D - L)^{-1}U$, ma non c'è bisogno di costruirla (né di trovare M, M^{-1}, N) per applicare il metodo – possiamo usare la formula:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

È applicabile se $\forall i \,.\, a_{ii} \neq 0$, infatti:

$$\det M = \det(D - L) = \det D = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La formula richiede di conoscere i primi $i - 1$ componenti di x^{k+1} per calcolare x_i^{k+1}, perciò non è facilmente parallelizzabile. D'altra parte, visto che le componenti richieste di x^k sono quelle $> i$, si può allocare un vettore solo sovrascrivendolo man mano che si calcolano gli $x_i^{(k+1)}$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= M^{-1}Nx^{(k)} + x^{-1}b \\ Mx^{(k+1)} &= Nx^{(k)} + b \\ (D - L)x^{(k+1)} &= Ux^{(k)} + b \\ Dx^{(k+1)} - Lx^{(k+1)} &= Ux^{(k)} + b \\ Dx^{(k+1)} &= Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b \end{aligned}$$

Scrivendo per esteso il risultato per ogni riga si ottiene la formula.