Teorema del punto fisso

Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$ e $\alpha \in (a, b)$ punto fisso per g ($g(\alpha) = \alpha$). Se

$$\exists \rho > 0 \, . \, \forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] = I \; . \; |g'(x)| < 1,$$

allora $\forall x_0 \in I$ la successione generata dal metodo

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

è tale che:

- $\forall k \, . \, x_k \in I$ e
- $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \alpha$,

cioè il metodo converge localmente.

Dimostrazione

Sia $\lambda = \max\limits_{x \in I} |g'(x)| < 1$ (esiste per il teorema di Weierstrass). Mostriamo che

$$x_0 \in I \implies |x_k - \alpha| \le \lambda^k \rho$$

per induzione su k:

caso base $k = 0$:

$$|x_0 - \alpha| \le \lambda^0 \rho = \rho \iff x_0 \in I,$$

che è vero per ipotesi.

passo induttivo

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \alpha| &= |g(x_k) - g(\alpha)| \\ &= |g'(\eta)(x_k - \alpha)| && \eta \in (x_k, \alpha) \quad \text{(t. Lagrange)} \\ &= |g'(\eta)| \, |x_k - \alpha| \\ &\le |g'(\eta)| \, \lambda^k \rho && \text{(ipotesi induttiva)} \end{aligned}$$

$\eta \in I$ perché per ipotesi induttiva $x_k \in I$, quindi $|g'(\eta)| < \lambda$, e:

$$|x_{k+1} - \alpha| \le \lambda \lambda^k \rho = \lambda^{k+1} \rho.$$

Quindi, visto che

$$0 \le |x_k - \alpha| \le \lambda^k \rho,$$

per il teorema del confronto $\lim\limits_{k \to \infty} |x_k - \alpha| = 0$.

Corollario

Se $|g'(\alpha)| < 1$, il metodo è localmente convergente. Si può anche dimostrare che se $|g'(\alpha)| > 1$ allora il metodo non è localmente convergente.

Dimostrazione

Sia $h(x) = |g'(x)| - 1$. $h(\alpha) < 0$ e h è continua, quindi per il teorema di permanenza del segno

$$\exists \rho > 0 \, . \, \forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \, . \, h(x) < 0,$$

dunque

$$\forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \; . \; |g'(x)| < 1.$$