Fattorizzazione LU

$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ è fattorizzabile LU se esistono L triangolare inferiore con 1 sulla diagonale ($\Rightarrow$ invertibile) e U triangolare superiore tali che $A = LU$.

Vale $\det A = \det L \det U = \det U$.

Teorema di esistenza e unicità

Se le sottomatrici principali di testa di A di ordine $1, \ldots, n-1$ sono invertibili, esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A.

Non vale il contrario: se un minore principale di testa (escluso l'n-esimo) è nullo, la fattorizzazione potrebbe esistere o no, unica o meno.

Dimostrazione

Per induzione su n:

caso base $n = 1$ A è sempre fattorizzabile LU:

$$A = (a) = (1)(a),$$

e la fattorizzazione è unica perché L deve avere 1 sulla diagonale.

passo induttivo supponiamo che il teorema valga per $n-1$. Allora L e U esistono se e solo se possiamo scrivere:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^{(n-1)} & y \\ \hline x^{\mathsf{t}} & \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L^{(n-1)} & 0 \\ \hline u^{\mathsf{t}} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U^{(n-1)} & w \\ \hline 0^{\mathsf{t}} & \beta \end{array}\right).$$

$\exists! L^{(n-1)}, U^{(n-1)}$ per ipotesi induttiva, visto che le condizioni del teorema valgono per $A^{(n-1)} \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Si ricava:

$$\begin{cases} A^{(n-1)} = L^{(n-1)}U^{(n-1)} + 0\,0^{\mathsf{t}} \\ x^{\mathsf{t}} = u^{\mathsf{t}}U^{n-1} + 1\,0^{\mathsf{t}} \\ y = L^{n-1}w + 0\beta \end{cases}.$$

Dobbiamo mostrare che $\exists! u, w, \beta$:

- u è la soluzione del sistema lineare $U^{(n-1)}u = x$, ed esiste unico perché $\det A \neq 0$ per ipotesi;
- analogamente $L^{(n-1)}w = y$, e $\det L^{(n-1)} = 1$;
- $\beta = \alpha - u^{\mathsf{t}}w$ è unico perché lo sono u e w.