Metodi di iterazione funzionale

Metodi iterativi per la risoluzione di equazioni non lineari.
Date $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che le soluzioni di $f(x) = 0$ sono le stesse di $x = g(x)$, impostiamo il metodo iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

Convergenza

Data $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^0$, se $\forall k \,.\, x_k \in [a, b]$ e $\lim x_k = \alpha$, allora $\alpha \in [a, b]$ e $g(\alpha) = \alpha$.
Dimostrazione:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} g(x_{k-1}) \overset{g \in C^0}{=} g\left(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}\right) = g(\alpha).$$

Questo significa che se la successione converge, allora il metodo “fa la cosa giusta”.

Convergenza locale

Il metodo si dice localmente convergente in α se $\exists \rho > 0 \,.\, \forall x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subseteq [a, b]$ vale:

- la successione non esce dall’intervallo: $x_k \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, e
- la successione converge ad α: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$ (se g è continua e la successione converge allora sappiamo che converge ad α).

Un metodo che non converge localmente può comunque convergere per alcuni punti.

Ordine di convergenza

Il metodo ha ordine di convergenza p se:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$