Errore inerente, algoritmico, totale

Data una funzione *razionale* f e una sua approssimazione in macchina g, definiamo l'errore:

inerente sensibilità del *problema* all'approssimazione dell'input:

$$\epsilon_{\text{in}} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \qquad f(x) \neq 0.$$

Se l'errore inerente è elevato (maggiore di ku, con k costante) si dice che il problema è *mal condizionato*.

algoritmico introdotto dall'*algoritmo* particolare scelto per implementare f:

$$\epsilon_{\text{alg}} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \qquad f(\tilde{x}) \neq 0.$$

Se l'errore algoritmico è elevato si dice che l'algoritmo è *instabile*.

totale differenza relativa tra il valore atteso e il risultato effettivo del calcolo:

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \qquad f(x) \neq 0.$$

Teorema: $\epsilon_{\text{tot}} \doteq \epsilon_{\text{in}} + \epsilon_{\text{alg}}$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\text{tot}} &= \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \\
&= \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)} + \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \frac{f(\tilde{x})}{f(x)} + \epsilon_{\text{in}} \\
&= \frac{f(\tilde{x})}{f(x)} \epsilon_{\text{alg}} + \epsilon_{\text{in}} = (\epsilon_{\text{in}} + 1)\epsilon_{\text{alg}} + \epsilon_{\text{in}} \\
&= \epsilon_{\text{in}}\epsilon_{\text{alg}} + \epsilon_{\text{alg}} + \epsilon_{\text{in}} \doteq \epsilon_{\text{alg}} + \epsilon_{\text{in}}.
\end{aligned}$$