# Tecniche pivoting per il metodo di Gauss

Applicando il metodo di Gauss alla matrice di numeri di macchina $A$, il risultato $\tilde{L}, \tilde{U}$ è la fattorizzazione esatta per $A + D$. Vale:

$$\|D\| = \mathrm{O}(u) \|L\| \|U\|,$$

quindi vogliamo che $L$ e $U$ siano piccoli per avere un errore basso. Non possiamo cambiare $U$, ma permutando le righe si può modificare $L$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ m_2^{(1)} & 1 & & & \\ m_2^{(1)} & m_3^{(2)} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \\ m_n^{(1)} & m_n^{(2)} & & & 1 \end{pmatrix} \qquad m_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},$$

quindi scambiando le righe in modo che il pivot sia l'elemento più grande in modulo della colonna possiamo garantire che $\left| m_i^{(k)} \right| \le 1$.

Si può anche dimostrare (provate a pensarci) che:

$$|u_{ij}| \le 2^n \max |a_{ij}|,$$

quindi l'errore è limitato (anche se esponenziale), e l'algoritmo è stabile.