Errore di rappresentazione (virgola mobile)

Indichiamo con $\tilde{x}$ il numero di macchina che approssima il valore reale $x \neq 0$. L'errore commesso nella rappresentazione è:

$$\eta_x = \tilde{x} - x \qquad \text{(assoluto)}$$
$$\epsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} \qquad \text{(relativo)}$$

Possiamo scrivere la relazione tra x e $\overline{x}$ come:

$$\overline{x} = x(1 + \epsilon_x).$$

Lemma

Tolti casi di overflow e underflow,

- $|\text{trunc}(x) - x| < \beta^{p-t}$;
- $|\text{arr}(x) - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{p-t}$;

Dimostrazione

$x = \Omega$: $\text{trunc}(x) = \text{arr}(x) = \Omega \implies \text{trunc}(x) - x = \text{arr}(x) - x = 0$;

$0 \leq x < \Omega$: sia $x = \beta^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \beta^{-i}$.

Indichiamo con a e b rispettivamente i numeri di macchina più vicini a x a sinistra e destra:

$$a = \text{trunc}(x) \qquad b = \text{trunc}(x) + \beta^{p-t}.$$

Visto che $b - a = \beta^{p-t}$ e $a \leq x < b$,

$$|\text{trunc}(x) - x| = |a - x| < |a - b| = \beta^{p-t}$$

e

$$\text{arr}(x) = \begin{cases} a & x < \frac{a+b}{2} \\ b & x \geq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

quindi

$$|\text{arr}(x) - x| \leq \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}\beta^{p-t}.$$

Teorema

Se $|x| \in [\omega, \Omega]$ (e $x \neq 0$),

$$|\epsilon_x| < u$$

dove u è la *precisione di macchina*, che vale β^{1-t} con troncamento e $\frac{1}{2}\beta^{1-t}$ con arrotondamento. L'errore relativo quindi è limitato da una costante del sistema.

Dimostrazione

troncamento si osserva che:

- per il lemma, $|\overline{x} - x| < \beta^{p-t}$, e
- $x = \beta^p(0.d_1 d_2 \ldots d_{53})_\beta \geq \beta^p 0.1_\beta = \beta^{p-1}$,

quindi:

$$|\epsilon_x| = \left|\frac{\overline{x} - x}{x}\right| < \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{1-t}.$$

arrotondamento analogamente troviamo che

$$|\epsilon_x| < \frac{\frac{1}{2}\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}.$$

Abbiamo un minore stretto nonostante nel lemma ci sia un $\leq$ perché numeratore e denominatore non possono essere contemporaneamente uguali alle loro maggiorazioni.