Matrici elementari di Gauss

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è elementare di Gauss se $\exists k$ tale che

$$E = I - ve_k^{\mathsf{t}} \qquad v_1 = \cdots = v_k = 0.$$

ve_k^{t} è la matrice con v nella k-esima colonna.

Proprietà

- E è triangolare inferiore invertibile;
- E^{-1} è ancora elementare di Gauss, e vale

  $$E^{-1} = I + ve_k^{\mathsf{t}},$$

  infatti:

  $$(I - ve_k^{\mathsf{t}})(I + ve_k^{\mathsf{t}}) = I + ve_k^{\mathsf{t}} - ve_k^{\mathsf{t}} - v(e_k^{\mathsf{t}}v)e_k^{\mathsf{t}} = I;$$

- $y = Ex$ si calcola in $\mathrm{O}(n-k)$ flops (in generale $\mathrm{O}(n^2)$), perché

  $$y_i = \begin{cases} x_i & 1 \le i \le k \\ x_i - v_i x_k & \text{altrimenti} \end{cases};$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \neq 0$ $\exists E$ elementare di Gauss tale che

  $$Ex = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{t}}.$$

  $E = I - ve_k^{\mathsf{t}}$ con $v_i = \frac{x_i}{x_k}$. Usiamo questa proprietà nella riduzione gaussiana.

- date $E_k = I - ve_k^{\mathsf{t}}, E_l = I - we_l^{\mathsf{t}}$ con $l > k$, allora

  $$E_k E_l = I - ve_k^{\mathsf{t}} - we_l^{\mathsf{t}} + v(e_k^{\mathsf{t}}w)e_l^{\mathsf{t}} = I - ve_k^{\mathsf{t}} - we_l^{\mathsf{t}}.$$

  Quindi calcolare il prodotto *in ordine* ha costo lineare.