Norme vettoriali

Una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ si dice norma vettoriale se:

- $\forall v \in \mathbb{F}^n \ . \ \|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{F} \ . \ \|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$;
- $\forall v, u \in \mathbb{F}^n \ . \ \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$;

Per esempio:

norma euclidea $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} = \sqrt{v \cdot v}$;

norma 1 $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$;

norma ∞ $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Le norme sono topologicamente equivalenti: date le norme $\|\cdot\|', \|\cdot\|''$,

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \ . \ \forall v \in \mathbb{F}^n \ . \ \alpha \|v\|'' \leq \|v\|' \leq \beta \|v\|'' .$$

Per esempio, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{x} \, \|x\|_\infty$.