Scambi righe nel metodo di Gauss

Data una matrice A invertibile ma con $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ per qualche k, non si può applicare direttamente il metodo di Gauss e occorre scambiare delle righe.

Visto che A è invertibile, $\exists i \,.\, a_{i1}^{(0)} \neq 0$ (ogni colonna ha almeno un termine non nullo), quindi possiamo costruire una matrice permutazione P che scambia la prima righa con la i-esima:

$$A^{(1)} = E^{(1)}(P_1 A^{(0)}) \qquad b^{(1)} = E^{(1)}(P_1 b^{(0)}).$$

Occorre verificare che $A^{(1)}(2:n, 2:n)$ è ancora invertibile per poter ripetere il procedimento anche ai passi successivi:

$$\begin{aligned}
\det A^{(1)} &= \det E^{(1)} \det P_1 \det A^{(0)} \\
&= 1(\pm 1)(\neq 0) \neq 0 \\
\det A^{(1)} &= \underbrace{a_{i1}^{(0)}}_{\neq 0} \det A^{(1)}_{2:n,2:n} \\
\det A^{(1)}_{2:n,2:n} &= \frac{\det A^{(1)}}{a_{i1}^{(0)}} \neq 0
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$A^{(n-1)} = E^{(n-1)} P_{n-1} \cdots E^{(1)} P_1 A$$

Tuttavia in generale $E^{(n-1)} P_{n-1} \cdots E^{(1)} P_1$ non è triangolare inferiore. Vale $P_l E^{(k)} = \hat{E}^{(k)} P_l$ se $l > k$, infatti:

$$P_2 E^{(1)} = P_2(I - m^{(1)} e_1^{\mathsf{t}}) = (P_2 - \underbrace{P_2 m^{(1)}}_{v} e_1^{\mathsf{t}}) = (I - v e_1^{\mathsf{t}}) P_2$$

perché $v e_1^{\mathsf{t}} P_2^{-1} = \hat{m}^{(1)} e_1^{\mathsf{t}}$, visto che P_2^{-1} moltiplicato a destra scambia la colonna 2 con una > 2. Allora possiamo scrivere:

$$\underbrace{A^{(n-1)}}_{U} = \underbrace{\hat{E}^{(n-1)} \cdots \hat{E}^{(1)}}_{L^{-1}} \underbrace{P_{n-1} \cdots P_1}_{P} A$$

$$A = P^{-1} L U$$