Condizioni di arresto per metodi iterativi

Nell'applicazione del metodo iterativo convergente

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases},$$

ci fermiamo dopo un numero fissato di iterazioni, o prima se si presenta una delle seguenti condizioni:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq \text{tol} \quad \frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k)} \right\|} \leq \text{tol} \quad \left\| Ax^{(k)} - b \right\| \leq \text{tol} \quad \frac{\left\| Ax^{(k)} - b \right\|}{\left\| x^{(k)} \right\|} \leq \text{tol}.$$

Se $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq \text{tol}$, non possiamo dire che $x^{(k+1)}$ approssima la soluzione x a meno di tol, infatti:

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= x^{(k+1)} - x = Pe^{(k)} \\ x^{(k+1)} - x^{(k)} &= \underbrace{(x^{(k+1)} - x)}_{e^{(k+1)} = Pe^{(k)}} - \underbrace{(x^{(k)} - x)}_{e^{(k)}} \\ &= (P - I)e^{(k)} \end{aligned}$$

Poiché il metodo è convergente, $\rho(P) < 1$, quindi $P - I$ è invertibile perché ha autovalori $\lambda_P - 1$ e $\lambda_p \neq 1$. Allora:

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= (P - I)^{-1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \\ \|e^{(k)}\| &\leq \|(P - I)^{-1}\| \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \left\| (P - I)^{-1} \right\| \text{tol} \end{aligned}$$

Quindi anche se la tolleranza è piccola possiamo avere un fattore moltiplicativo grande per cui la soluzione non è buona. In particolare questo accade quando $\rho(P) \simeq 1$, perché $(P - I)^{-1}$ ha autovalori $\frac{1}{\lambda_P - 1}$.

Per l'altra condizione si ha un risultato analogo con $\|A^{-1}\|$.