Metodo di Gauss per sistemi lineari

Dati $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, b \in \mathbb{F}^n$, vogliamo trovare un sistema $A'x = b'$ equivalente a $Ax = b$ e con A' triangolare superiore.

Processo iterativo:

$$(A \mid b) \to (A^{(1)} \mid b^{(1)}) \to \cdots \to (A^{n-1} \mid b^{n-1}),$$

dove

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} - m_i^{(k)} a_{kj}^{(k-1)} & k < i \leq n \\ a_{ij}^{(k-1)} & i \leq k \end{cases} \qquad m_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_i^{(k)} b_k^{(k-1)}$$

Nel calcolo effettivo, si scrive direttamente 0 in a_{ik} per evitare errori dovuti a cancellazione numerica. Questa versione del metodo non prevede scambi di righe, quindi è valido solo se $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

Costo

Ad ogni passo si aggiorna una matrice $(n-k) \times (n-k)$
Per ogni $k = 1, \ldots, n-1$, si calcola:

- $m_i^{(k)}$: una divisione per ogni $i = k+1, \ldots, n$ – $n - k$ operazioni;
- a_{ij}: una moltiplicazione e un'addizione per ogni $i, j = k+1, \ldots n$ – $2(n-k)^2$;
- b_i: una moltiplicazione e un'addizione per ogni $i = k+1, \ldots n$ – $2(n-k)$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 + \mathrm{O}(n-k) = \frac{2}{3}n^3 + \mathrm{O}(n^2)$$