Condizionamento di sistemi lineari

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile e $b \in \mathbb{R}^n$, cerchiamo x tale che $Ax = b$. Calcolare l'errore inerente di $f(A, b) = A^{-1}b$ considerando tutte le operazioni svolte è difficile, perciò:

- anziché calcolare l'errore su ciascuna componente di x, ovvero $\left|\frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i}\right|$, usiamo una norma: $\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$.
- usiamo il seguente risultato:

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} \qquad \mu(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|,$$

  dove A è una matrice di numeri di macchina, $\tilde{x} = f(A, \tilde{b})$, la norma matriciale è quella indotta dalla norma vettoriale usata.

$\mu(A)$ è detto *numero di condizionamento* ed è l'equivalente del coefficiente di amplificazione (con $\leq$ perché usiamo norme).

Vale $\mu(A) \geq 1$, visto che $\|A\| \left\|A^{-1}\right\| \geq \left\|AA^{-1}\right\| = \|I\| = 1$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \tilde{x} - x &= A^{-1}\tilde{b} - A^{-1}b \\ &= A^{-1}(\tilde{b} - b) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|\tilde{x} - x\| &= \left\|A^{-1}(\tilde{b} - b)\right\| \\ &\leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|\tilde{b} - b\right\| \end{aligned}$$

e

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \qquad \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|},$$

quindi

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}.$$

Norma ∞

Se $\tilde{b}_i = b_i(1 + \epsilon_i)$, $|\epsilon| \leq u$,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i - b_i &= b_i \epsilon_i \\ \|\tilde{b}_i - b_i\|_\infty &= \max |b_i \epsilon_i| \leq \max |\epsilon_i| \max |b_i| \\ &= \max |\epsilon_i| \, \|b_i\|_\infty < u \, \|b\|_\infty, \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mu_\infty(A) u.$$