Risoluzione iterativa di sistemi lineari

Data la matrice invertibile A e una sua *decomposizione additiva* $A = M - N$, con M invertibile, vale:

$$Ax = b \iff (M - N)x = b \iff x = \underbrace{M^{-1}N}_{P}x + \underbrace{M^{-1}b}_{q},$$

ovvero $\overline{x}$ è soluzione se e solo se $g(\overline{x}) = \overline{x}$, con $g(x) = Px + q$. Trovare una soluzione al sistema equivale quindi a trovare il punto fisso di g.

Possiamo costruire quindi un metodo iterativo:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$$

Se $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, allora $x^* = Px^* + q$, cioè $Ax^* = b$ (se converge, "fa la cosa giusta"). Infatti:

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim g(x^{(k)}) \overset{g \text{ continua}}{=} g(\lim x^{(k)}) = g(x^*)$$

Visto che A è invertibile, per ogni scelta di $x^{(0)}$ si converge allo stesso x^*. In generale un metodo iterativo si dice *convergente* se la successione generata per ogni scelta del punto iniziale converge alla soluzione.

Un metodo si dice *applicabile* se M è invertibile.

Efficienza

È conveniente applicare i metodi iterativi su matrici sparse, visto che calcolando la fattorizzazione LU o riducendo con Gauss il risultato spesso è denso (e.g. matrice ad albero), mentre Jacobi e Gauss-Seidel operano direttamente con le componenti di A. Nel caso generale non sono più efficienti: c'è il costo di costruzione di P e q, più $\mathrm{O}(n^2)$ (matrice per vettore) ad ogni iterazione.