Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di metodi iterativi

Il metodo

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$$

è convergente se e solo se $\rho(P) < 1$.

Dimostrazione condizione necessaria

Sia λ l'autovalore di P tale che $|\lambda| = \rho(P)$ e v un suo autovettore.
Poiché il metodo è convergente, la successione ottenuta a partire da:

$$x^{(0)} = x^* + v \qquad x^* = A^{-1}b$$

è convergente.

Se $e^{(k)} = x^{(k)} - x^* = P^{k+1}e^{(0)}$,

$$e^{(k)} = P^k(\overbrace{x^* + v}^{x^{(0)}} - x^*) = P^k v = \lambda^k v$$

$$\|e^{(k)}\| = \left\|\lambda^k v\right\| = |\lambda|^k \|v\|$$

Ma

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \|e^{(k)}\| = 0 \\ &\implies \lim_{k\to\infty} |\lambda|^k \|v\| = 0 \\ &\overset{v\neq 0}{\implies} \lim_{k\to\infty} |\lambda|^k = 0 \\ &\implies |\lambda| < 1, \end{aligned}$$

perciò $\rho(P) < 1$.

Questo significa anche che minore è il modulo del raggio spettrale, più velocemente converge; se $\rho(P) = \frac{1}{2}$ l'errore dimezza ad ogni iterazione.