Condizione sufficiente per la convergenza di metodi iterativi

Il metodo

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$$

è convergente se esiste una norma matriciale indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| < 1$.

Dimostrazione

Definiamo l'errore $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$. Allora:

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= (Px^{(k)} + q) - (Px^* + q) = P(x^{(k)} - x^*) \\ &= Pe^{(k)} = P(Pe^{(k-1)}) = \cdots = P^{k+1}e^{(0)} \end{aligned}$$

Mostriamo che:

$$\|P\| < 1 \implies \lim \|e^{(k)}\| \overset{\|\cdot\| \text{ continua}}{=} \|\lim e^{(k)}\| = 0.$$

Dal momento che

$$0 \leq \|e^{(k+1)}\| = \|P^{k+1}e^{(0)}\| \leq \|P^{k+1}\|\|e^{(0)}\| \leq \underbrace{\|P\|^{k+1}}_{\to 0}\|e^{(0)}\|,$$

per il teorema dei carabinieri $\|e^{(k)}\| \to 0$ (indipendentemente da $x^{(0)}$) e il metodo è convergente.

Con condizione sufficiente e necessaria

Per il teorema di Hirsh $\rho(P) \leq \|P\|$, quindi $\rho(P) < 1$, che è vero se e solo se il metodo converge.