Shortest path three (SPT)

Inizializzazione (albero fittizio)

$(n-1)c_{MAX}+1$ — nodi coda di archi che potrebbero violare Bellmann-Ford

$p_r = -$, $d_r = 0$, $p_i = r$, $d_i = M$, $i \neq r$, $Q = \{r\}$

1) Se $Q = \emptyset$, STOP
2) Scegliere $i \in Q$
3) $Q = Q \setminus \{i\}$
4) $\forall (i,j) \in A$: se $d_i + c_{ij} < d_j \rightarrow \begin{cases} p_j = i \quad d_j = d_i + c_{ij} \\ \text{se } j \notin Q, \text{ allora } Q = Q \cup \{j\} \end{cases}$
5) Ritornare a (1).

SPT.S (Dijkstra)

$i \in Q$ t.c. $d_i = \min\{d_i : i \in Q\}$

Complessità: $O(n^2)$ Denso
$O(n)$ Sparso

- n iterazioni : $O(n)$
- costo selezione etichetta : $O(n)$ $\longrightarrow$
- verifica condizioni di Bellmann + aggiornamenti : $O(m) \rightarrow m \leq n^2$

heap binario : $O(m \log n)$

SPT.L (Bellmann-Ford)

Lista → F.I.F.O.

Complessità: $O(m \cdot n)$

Greedy MST (Minimum spanning three)

$S = \{\text{archi inseriti}\}$ $\quad R = \{\text{archi rimossi}\}$

Inserzione

Scegliere un taglio (N', N'') t.c. $A(N', N'') \cap S = \emptyset$ (ovvero il taglio non deve prendere archi giá inseriti), inserire in S l'arco $(i, j) \in A(N', N'')$ t.c. $(i, j) \notin R$ di costo minimo.

Cancellazione

Selezionare un ciclo C t.c. $C \cap R = \emptyset$ (ovvero nel ciclo non devono esserci archi giá scartati), scartare l'arco $(i, j) \in C$ t.c. $(i, j) \notin S$ di costo massimo.

Iterazione: effettuare un'inserzione o una cancellazione finché $|S| = n - 1$.

Kruskal

Si ordinano gli archi per costo non decrescente e si esaminano in quell'ordine. Preso un arco (i, j), se aggiungendolo non forma un ciclo con $S = \{\text{archi inseriti}\}$ allora lo aggiungo ad S altrimenti lo aggiungo ad R.

Prim

Fa esclusivamente inserzioni. Preso un taglio che esclude un nodo i dagli altri scegliamo l'arco di costo minimo tra gli archi del taglio inserendolo, continuo l'algoritmo creando un nuovo taglio che separa il nodo i ed il nodo j (che abbiamo collegato precedentemente) dal resto del grafo e proseguiamo scegliendo l'arco di costo minimo del taglio che si crea, e così via.

Algoritmo dei cammini aumentanti (Ford-Fulkerson)

Input: x flusso ammissibile

1) Ricerca di un cammino aumentante (visita del grafo).
   - Se $\nexists$ STOP.
2) Aumentare il flusso lungo il cammino di θ.
3) Ritornare a (1).

Ford-Fulkerson (DFS)

Preso $U = \max\{u_{ij} : (i,j) \in A\}$

Complessità: $O(m \cdot n \cdot U)$

- iterazioni: $O(n \cdot U)$
- Costo per iterazione ≡ visita grafo: $O(m)$

Edmons-Karp (BFS)

Complessità: $O(n \cdot m^2)$

- iterazioni: $O(n \cdot m)$

Algoritmo di cammini minimi successivi

Input: x pseudoflusso minimale

1) Se x é ammissibile ($g(x)=0$), STOP
2) Ricerca di un cammino aumentante di costo minimo
   - Se ∄ STOP (∄ soluzioni ammissibili), altrimenti aumentare di $\theta = \min\{\text{capacitá del cammino}, e_x(s), -e_x(t)\}$ con $s \in O_x$ e $t \in D_x$ dove $O_x = \{i \in N : e_x(i) > 0\}$ e $D_x = \{i \in N : e_x(i) < 0\}$
3) Ritornare a (1).

Bellmann-Ford

$$\sum_{i \in O_x} e_x(i) \leq \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ \text{con } c_{ij} < 0}} u_{ij} + \sum_{\substack{i \in N \\ \text{con } b_i > 0}} b_i = \bar{g}$$

Complessitá: $O(\bar{g} \cdot n \cdot m)$

- $\bar{g}$ iterazioni

Algoritmo del simplesso primale

Input: B base primale ammissibile

1) $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$, $\bar{y} = (\bar{y}_B, \bar{y}_N) = (c A_B^{-1}, 0)$
2) Se $\bar{y} \geq 0$, STOP $(\bar{x}, \bar{y}$ ottime$)$
3) Scegliere $h \in B$ t.c. $\bar{y}_h < 0$ Indice uscente
4) $\bar{\xi} = -A_B^{-1} \cdot u_{B(h)}$ Direzione di crescita
5) $\bar{\lambda} = \min\{\bar{\lambda}_i : i \in N\}$ Passo con $\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \frac{(b_i - A_i \bar{x})}{A_i \bar{\xi}} & \text{se } A_i \bar{\xi} > 0 \\ +\infty & \text{se } A_i \bar{\xi} \leq 0 \end{cases}$
6) Se $\bar{\lambda} = +\infty$ $(A_N \bar{\xi} \leq 0)$, STOP → (P) sup. limitato, (D) vuoto
7) Scegliere $k \in N$ t.c. $\bar{\lambda} = \lambda_k$ Indice entrante
8) $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ Cambio di base
9) Ritornare a (1).

Algoritmo del simplesso duale

Input: B base duale ammissibile

1) Ammissibilità primale: $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ $A_N \bar{x} \leq b_N$?
2) $k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\}$ Indice entrante
3) $d = (-\eta_B, \underbrace{1}_{k}, 0)$ con $\eta_B = A_k A_B^{-1}$ Direzione di decrescita
4) Ammissibilità duale: $\bar{y} + \theta d \geq 0$?
5) $\bar{y} + \theta d \geq 0 \iff \theta \leq \bar{\theta} = \min\{\bar{\theta}_i : i \in B\}$ Max passo di spostamento
6) $h = \min\{i \in B : \bar{\theta} = \bar{\theta}_i\}$ Indice uscente
7) $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$
8) Ritornare a (1).

$$\bar{\theta}_i = \begin{cases} \frac{\bar{y}_i}{\eta_i} & \text{se } \eta_i > 0 \\ +\infty & \text{se } \eta_i \leq 0 \end{cases}$$