Teorema (Rappresentazione dei numeri in macchina)

Sia $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 1$ la base di enumerazione.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\exists!$:

$p \in \mathbb{Z}$ esponente
$\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sequenza di cifre con $d_1 \neq 0$ e d_i non definitivamente $= B-1$

t.c. $$x = \underbrace{\text{sign}(x)\, B^p \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \cdot B^{-i}}_{\text{rappresentazione in base } B \text{ del numero } x.}$$

Numeri in macchina

$$F(B,t,m,M) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \pm B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i} \right\} \cup \{0\}$$

con $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i \leq B-1$, $-m \leq p \leq M$.

- $F(B,t,m,M)$ ha cardinalitá finita
- $\omega = B^{-m} \cdot B^{-1}$ é il piú <u>piccolo</u> numero di macchina
- $\Omega = B^M \cdot (B-1) \sum_{i=1}^{t} B^{-i}$ é il piú <u>grande</u> numero di macchina
- $|x| > \Omega \rightsquigarrow$ <u>overflow</u>
- $|x| < \omega \rightsquigarrow$ <u>underflow</u> $(x \neq 0)$

Troncamento e Arrotondamento

Il <u>troncamento</u> di x é $\tilde{x} = B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i}$ ed é il piú grande numero di macchina piú piccolo di x.
Presi due numeri di macchina $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, con $\tilde{x} < x < \tilde{y}$, l'<u>arrotondamento</u> di x gli associa il numero piú "vicino" tra $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$.

Distanza tra due numeri

$$x = B^p \cdot \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i}, \quad y = B^p \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i} + B^{-t} \right).$$

$$|y - x| = B^{p-t}$$

Errore di rappresentazione

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} \longrightarrow \tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$$

$u \longrightarrow$ precisione di macchina

$$|\varepsilon_x| \leq u$$

Errore inerente o inevitabile

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \, \varepsilon_x$$

$\longrightarrow$ coefficiente di amplificazione

Errore algoritmico

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

$$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{in}$$

Costo operazioni

$$+ : \underbrace{\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}}_{\text{mal condizionata se } x \text{ si avvicina a } y} \qquad - : \underbrace{\frac{x}{x-y}, -\frac{y}{x-y}}_{\text{errore di cancellazione}} \qquad \underbrace{* : 1 \qquad \% : 1}_{\text{sempre ben condizionate}}$$