Norma

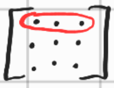
$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \qquad \text{(Norma 1)}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \qquad \text{(Norma euclidea)}$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \qquad i = 1, \dots, n \qquad \text{(Norma infinito)}$$

$$\|A\|_i = \max \|Ax\| \qquad \|x\|_i = 1 \qquad i = 1, \dots, \infty \qquad \text{(Norma matriciale)}$$

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots, n$$



$$\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad j = 1, \dots, n$$

autovalore di A

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \longrightarrow \rho(A) = \max |\lambda_i| \qquad i = 1, \dots, n$$

Condizionamento

$$K_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$$

$$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

Teorema fondamentale dell' Algebra

radici

A ha n autovalori che sono gli zeri del $p(\lambda)$

m.a. = # occorrenze di λ

m.g. = $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I)) \leq$ m.a.

Matrice diagonalizzabile

Se $\exists S$ invertibile t.c. $B = (S^{-1} \cdot A \cdot S)$ é diagonale e $\forall \lambda$ m.a. = m.g.

Teorema di Gershgorin

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \overset{\nearrow \text{centro}}{a_{ii}}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \overset{\nearrow \text{raggio}}{|a_{ij}|}_{i \neq j} \right\}.$$

Se λ é autovalore di A allora $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Matrice elementare

$$A = I + \underbrace{z}_{\text{vettore colonna}} \cdot \overbrace{w^T}^{\text{vettore riga}} \qquad z, w \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$z w^T = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} (w_1 \ldots w_n) = \begin{pmatrix} z_i w_j \end{pmatrix}$$

Predominante diagonale per righe

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Se A é predominante diagonale per righe é invertibile. ($\Leftarrow\!\!\!\!/$)

Fattorizzazione LU (Gauss o LR)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, scriviamo $A = L \cdot R$.

L triangolare inferiore con elementi sulla diagonale = 1 $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ x & & 1 \end{bmatrix}$

R triangolare superiore. $\begin{bmatrix} u & \cdots & u \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u \end{bmatrix}$

$$A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot \underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{\det U}} = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Se $Ax = b \Rightarrow LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & z \\ \hline w^T & a_{nn} \end{array}\right) = LU = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & u_n \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} L_{n-1} U_{n-1} = A_{n-1} \\ L_{n-1} y = z \\ x^T U_{n-1} = w^T \\ x^T y + u_n = a_{nn} \end{cases}$$

Matrice elementare di Gauss → sono triangolari inferiori con 1 sulla diagonale

$A = I + u e_j^T \qquad u_1 = \dots = u_j = 0$

↳ j-esimo vettore della base canonica

Presa $A = I + u e_j^T$ diremo che $A^{-1} = I - u e_j^T$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_k \neq 0$, allora $\exists$ una matrice elementare di Gauss E t.c.

$$Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Metodi iterativi

$Ax = b \qquad A = M - N \qquad \det(M) \neq 0$

$Ax = b \iff (M-N)x = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

Preso $P = M^{-1}N$ e $q = M^{-1}b$ scriveremo che:

$$Ax = b \iff x = Px + q$$

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n & \text{(utente)} \\ x_{k+1} = Px_k + q & \text{(Teorica)} \end{cases}$$

$x_{k+1} = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

$Mx_{k+1} = Nx_k + b$ (Sperimentale)

Se $\lim_{k \to +\infty} x_k = x \in \mathbb{R}^n$ allora $x = Px + q$

$\lim_{k \to +\infty} x_k = x \iff \lim_{k \to +\infty} \|x_k - x\| = 0$

$\|x_k - x\|_\infty = \max |(x_k - x)_i| \qquad i = 1, \dots, n$

$$0 \leq \underbrace{|(x_k - x)_i|}_{\text{tende a } 0} \leq \underbrace{\max |(x_k - x)_i|}_{\text{tende a } 0}$$

Metodo di Jacobi

$M = \mathrm{diag}(A) \qquad N = M - A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1\,n} \\ -a_{n1} & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \qquad i = 1, \dots, n$$

svolgo nnz operazioni

nnz(A) = # elementi $\neq 0$ di A

= costo del prodotto matrice × vettore

Metodo di Gauss-Seidell

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \qquad i = 1, \dots, n$$

nnz(A) = costo del prodotto matrice × vettore

$M = \text{tr. inf.}(A) \qquad N = M - A$

Teoremi sulla convergenza

1) Se $\exists$ una norma matriciale t.c. $\|P\| < 1$ allora il metodo è convergente.

2) Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo iterativo è $\rho(P) < 1$.

3) Se A è predominante diagonale $\Rightarrow$ Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.