Funzioni in piú variabili ($\mathbb{R}^n$)

1) Insiemi nel piano
2) Descrivere delle curve
3) Studiare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
   - limiti
   - Continuitá
   - Derivate
   - Studio di funzioni

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oppure $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Quindi scrivendo $f(x)$ avremo che la $x \notin \mathbb{R}$ ma é un "vettore" del tipo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Struttura Euclidea di $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ é uno spazio vettoriale.
- somma
- prodotto per un numero
- combinazione lineare
- indipendenza lineare
- base
- sottospazio

$$x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{x}_{\text{Vettore}} = (x_1, \dots, x_n)$$

$x = (x_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Somma di due vettori

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

Prodotto per un numero

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad \lambda \cdot x = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$

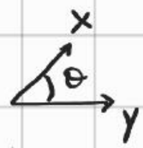
$y = (y_1, \dots, y_n)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Prodotto scalare

Operazione che prende in input due vettori e come output un numero.

Geometricamente:



$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$

se $x, y \neq 0$ $\quad \langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$\langle x, y \rangle = x \cdot y = (x, y)$

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + , \dots, x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Esempio

$\mathbb{R}^2 \qquad x = (x_1, x_2) \qquad y = (y_1, y_2)$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Norma

Operazione che ha come input un vettore e come output un numero ≥ 0.

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{(Norma di } x\text{)}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

lunghezza del vettore x

Esempio

$\mathbb{R}^2 \to x \in \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2)$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \text{lunghezza del vettore } x$$

Distanza

Operazione che ha come input due vettori e come output un numero ≥ 0.

$$\text{dist}(x, y) = d(x, y) = \|x - y\|$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$
$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

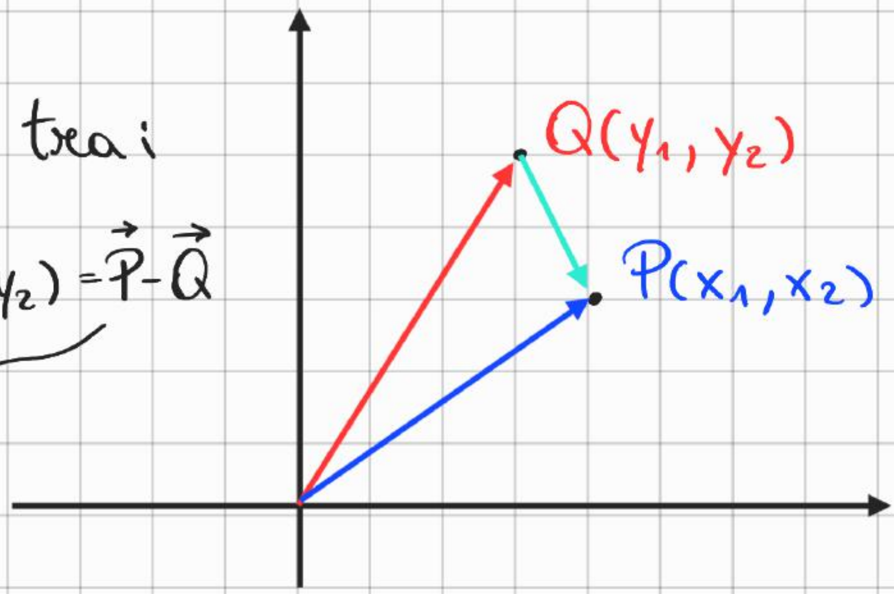
Digressione

$x \in \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2)$

In $\mathbb{R}^2$ (o in generale in $\mathbb{R}^n$) se scrivo (x_1, x_2), questo rappresenta sia il punto nel piano cartesiano, che il vettore applicato nell'origine con la punta della freccia in (x_1, x_2)

La differenza tra i due vettori é:

$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \vec{P} - \vec{Q}$



Penso il vettore differenza come applicato in Q con punta della freccia in P.

$d(x,y) = d(P,Q) = \|x-y\|$

Insiemi

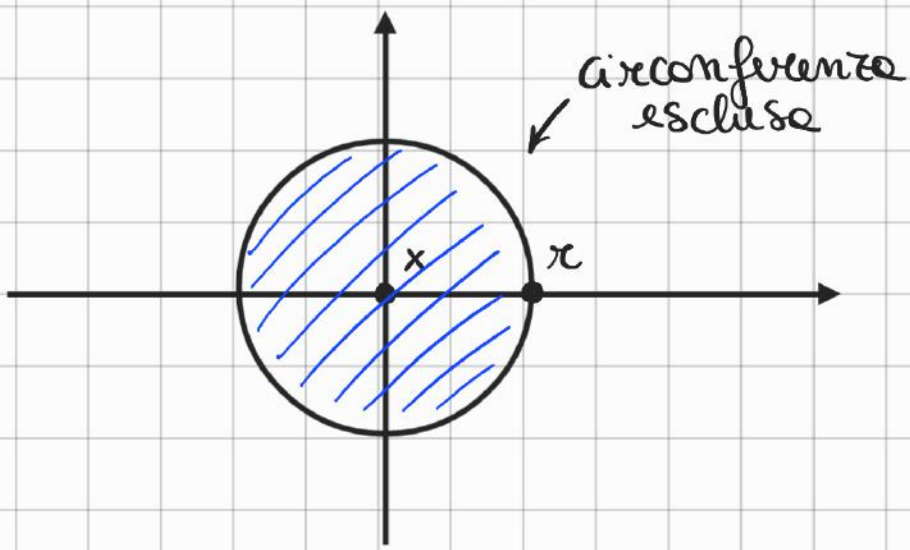
Definizione

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$.
Si dice palla di centro x e di raggio r l'insieme:

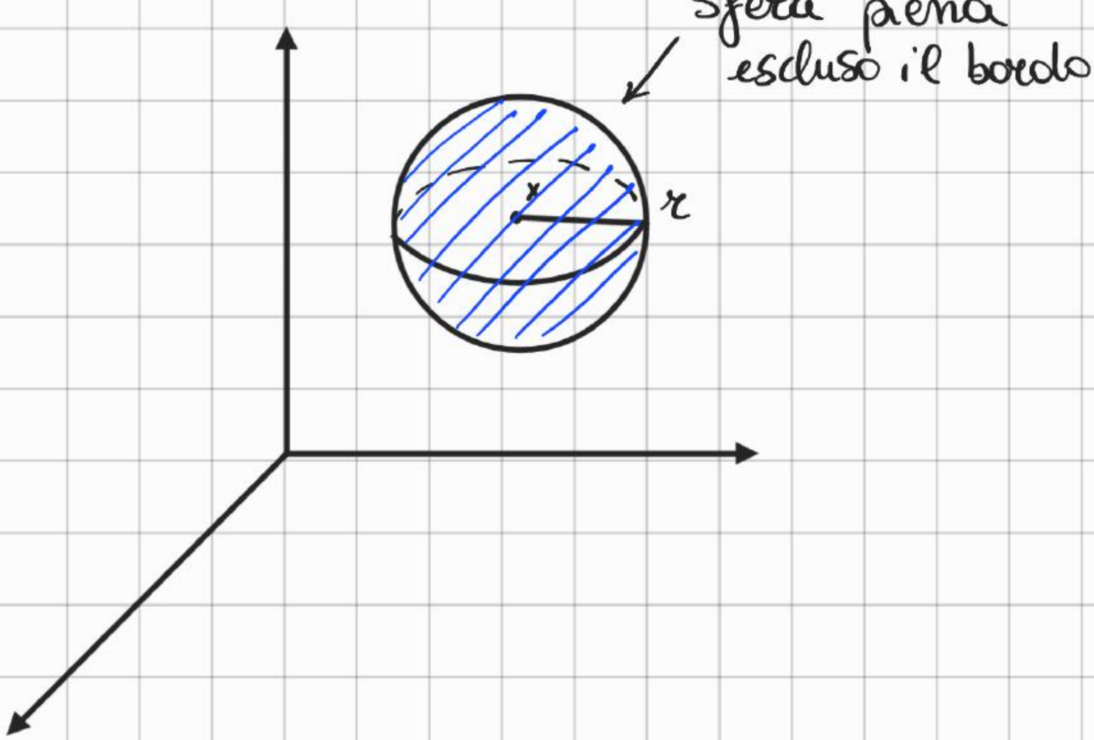
$$B(x, r) = B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r \}$$

Esempio

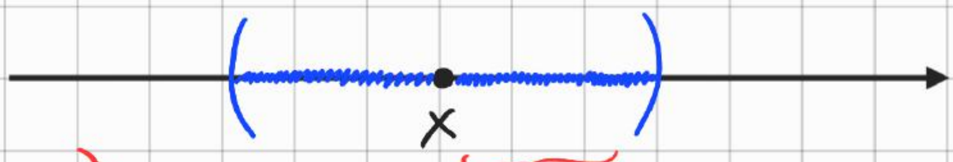
$\mathbb{R}^2$ $$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,y) < r \}$$



$\mathbb{R}^3$



Se fossimo in $\mathbb{R}$ $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) < r\}$



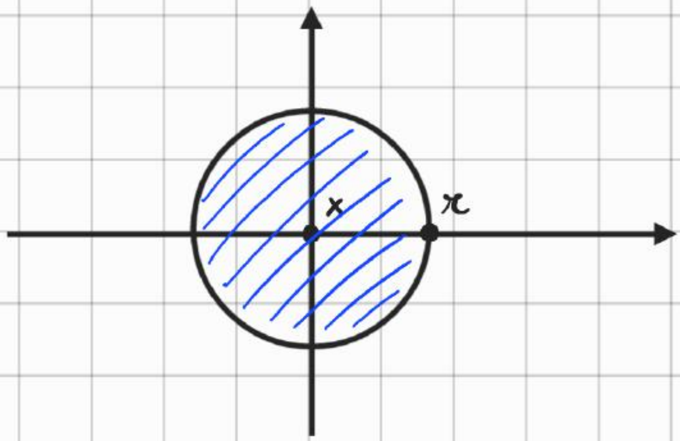
$(x-r, x+r)$

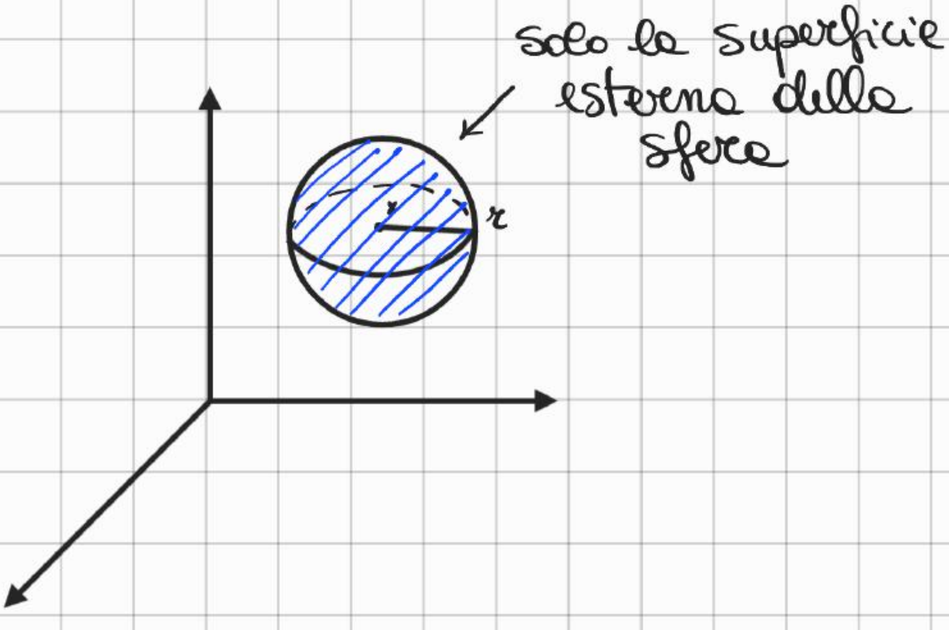
Definizione

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Si dice sfera di centro x e raggio r l'insieme:

$$S(x,r) = S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) = r\}$$





Notazione

Se E é un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

$E^c = \mathbb{R}^n \setminus E \longrightarrow$ complementare di E rispetto a tutto $\mathbb{R}^n$

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice :

- Punto interno ad E se esiste una palla di centro x_0 e raggio $r>0$ contenuta in E.
  Cioé se esiste $r>0$ t.c.
  $B_r(x_0) \subset E$.

- Punto esterno ad E se esiste una palla di centro x_0 e raggio $r>0$ contenuta in E^c.
  Cioé se esiste $r>0$ t.c.
  $B_r(x_0) \subset E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$

- Punto di frontiera se non é ne interno ne esterno ad E.
  Cioé se esiste $r>0$ t.c.
  $B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$
  $B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$

Osservazione

Se x_0 é un punto interno ad E allora $x_0 \in E$
Se x_0 é un punto esterno ad E allora $x_0 \notin E$
Se x_0 é un punto di frontiera allora $x_0 \in E \vee x \notin E$

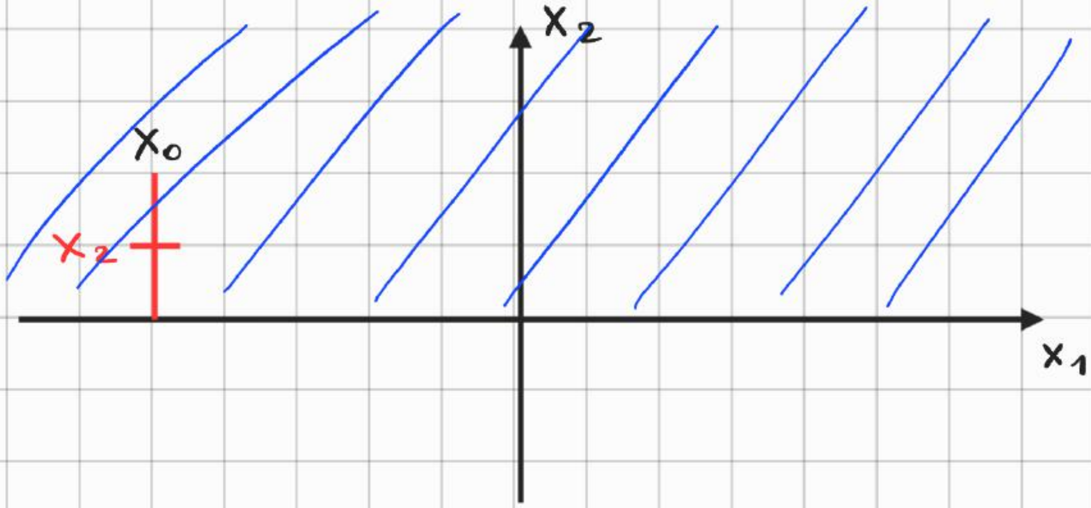
$\mathring{E}$ = insieme dei punti interni.

∂E = insieme dei punti di frontiera.

Esempio

- $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$

$\mathring{E} = E \longrightarrow$ prendo $(x_1, x_2) \in E \mid x_2 > 0$, scelgo $r < \frac{x_2}{2}$



Segue che $B_r(x_0) \subset E \rightarrow x_0 \in \mathring{E}$

$E \subset \mathring{E} \Rightarrow E = \mathring{E}$

Tutti i punti di E sono punti interni di E (il viceversa é sempre vero).

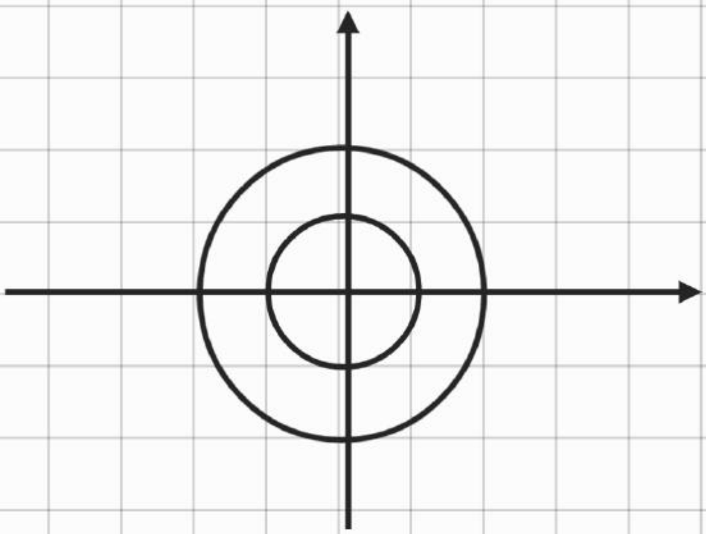
$\partial E = \{ \underbrace{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 0}_{A} \}$ $\quad (x_1, 0) \in \partial E$

$\partial E \in E^c$

$A \subset \partial E \qquad (x_1, x_2) \in A \;, \; x_2 < 0 \;, \; r < \frac{|x_2|}{2}$

Segue che $B_r(x_1, x_2) \subseteq E^c \qquad (x_1, x_2) \in \partial E.$

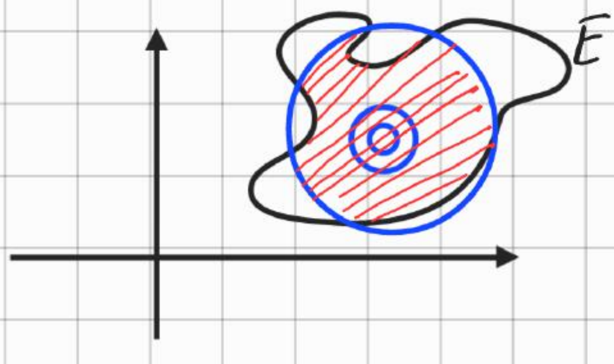
- $E = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \}$



Definizione

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di accumulazione per E se ogni palla di centro x e raggio r esiste un punto di E diverso da x e $\forall r > 0$ $B_r(x) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$



Osservazione

Se x è un punto interno allora è anche un punto di accumulazione.

Definizione

Se $x \in E$ ma $x \notin Acc(E)$ allora x si dice punto isolato

Definizione

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se ogni $x \in E$ punto interno ad E, cioè se $E = \mathring{E}$.

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se E^c è aperto.

($\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi).

Esempio

- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ è aperto
- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ è chiuso

Teorema

E contiene ∂E <=> E è chiuso

$$\partial E \subset E \iff E \text{ è chiuso.}$$

Esempio

- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ é aperto.

  $\partial E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

- $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{2x_1 + 3x_2 - 1 = 0}_{\text{retta}}\}$

  $E = \partial E$ quindi E é chiuso.

Proprietá (Insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$)

- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono aperti
- $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = E$ é aperto (Unione)
- Intersezione (finita) di insiemi aperti é un insieme aperto.

Proprietá (Insiemi chiusi in $\mathbb{R}^n$)

- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono chiusi
- Unione (finita) di insiemi chiusi é un insieme chiuso
- Intersezione (anche numerabile) di insiemi chiusi é un insieme chiuso.

Definizione

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste una palla di centro l'origine che contiene tutto E.

Ovvero, se $\exists\ r > 0$ t.c. $E \subset B$.

Esempio

- Un quadrato $\subseteq \mathbb{R}^2$ é sempre limitato.
- Una retta $\subseteq \mathbb{R}^2$ non é mai limitata.

Abbiamo visto come "estendere" $\mathbb{R}$ mettendo un pallino al di sopra:

$$\mathbb{R} \rightarrow \dot{\mathbb{R}} \ (\mathbb{R} \text{ esteso}) = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

É l'idea é la seguente:

Ma come possiamo estendere $\mathbb{R}^n$?

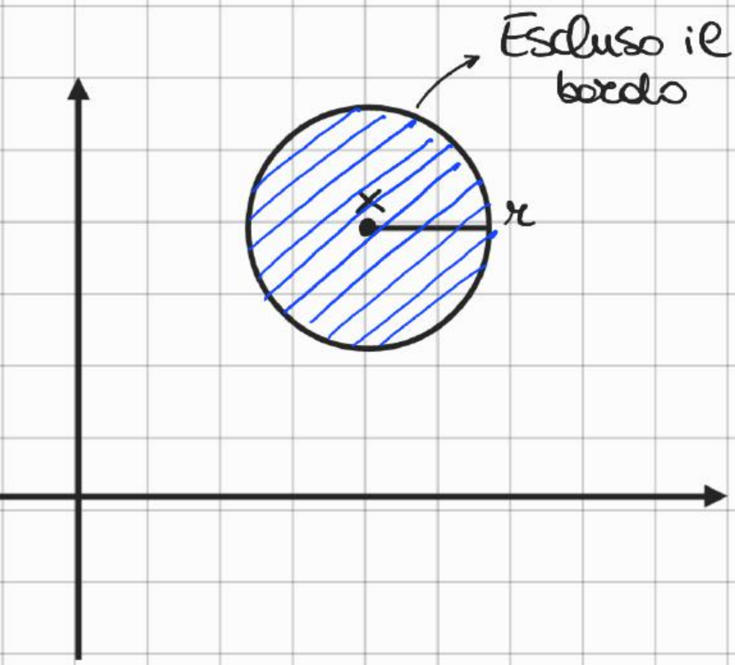
$$\mathbb{R}^n \rightarrow \dot{\mathbb{R}}^n \ (\mathbb{R}^n \text{ esteso}) = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$ Intorno?

<u>Definizione</u>

La palla di centro ∞ e raggio r é il complementare della palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ con centro l'origine e raggio r.

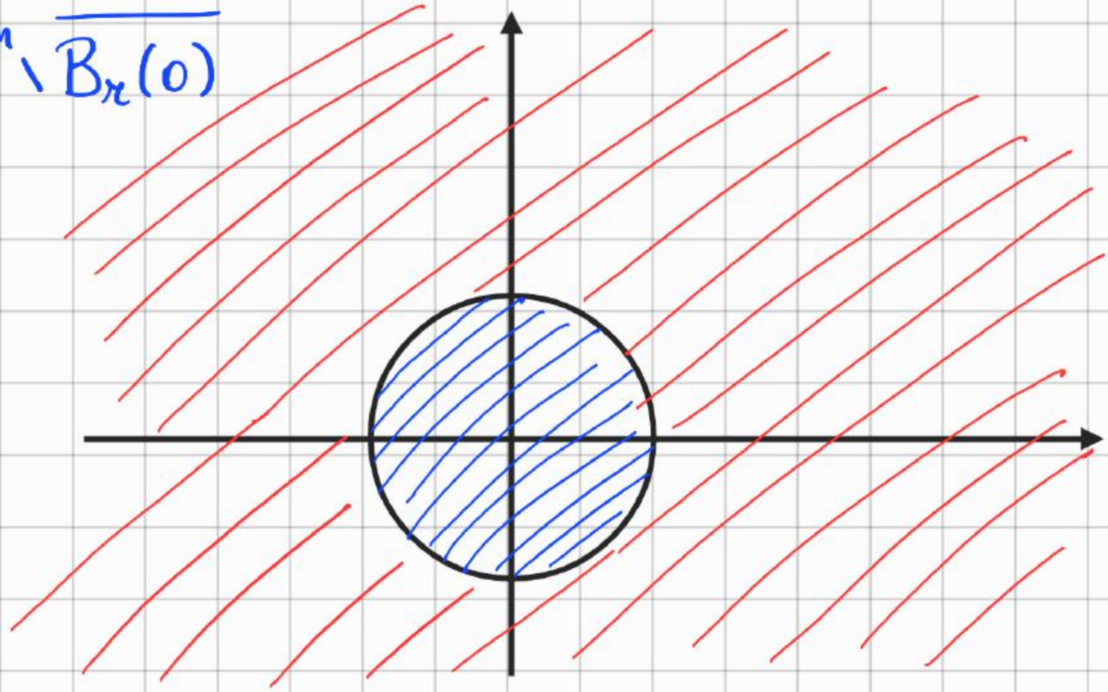
<u>Esempio</u>

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r\}$$



Se $x = \infty$?

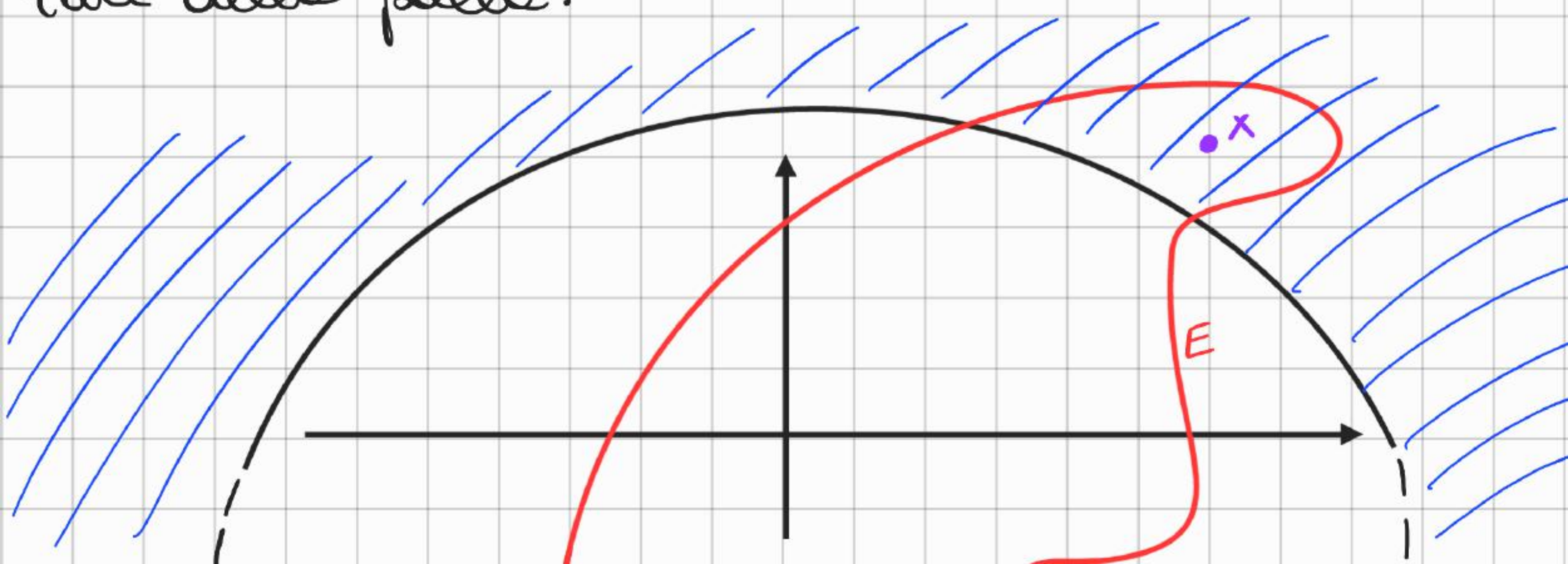
$$B_r(x) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$$ chiuso



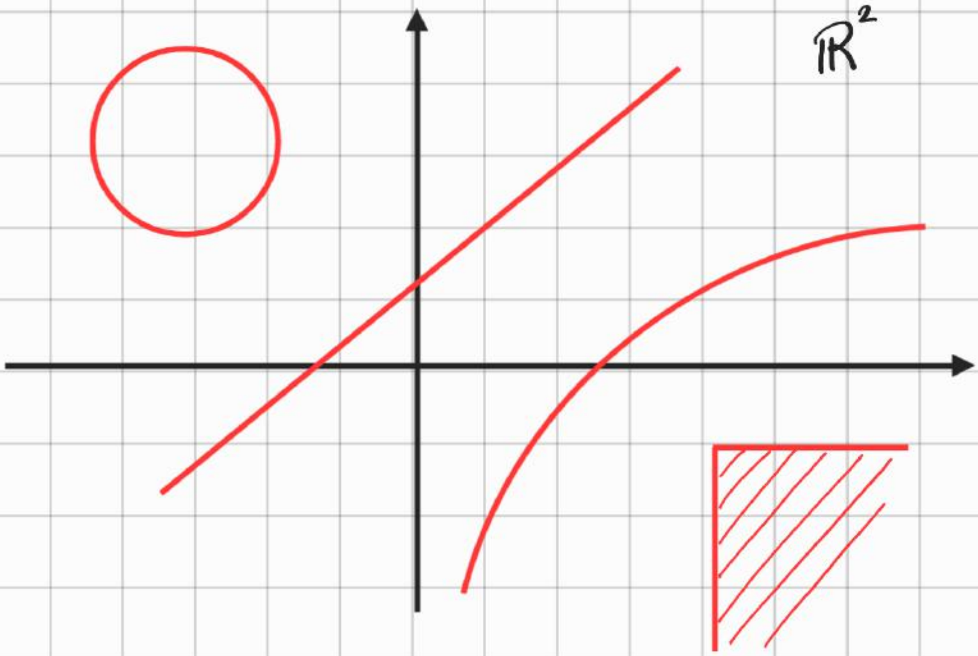
$\forall\ \overline{B_r(0)}$ trovo un intorno sferico di ∞ definito come $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$

Osservazione

Un insieme non è limitato <=> ∞ è punto di accumulazione.
∞ è punto di accumulazione <=> per quanto grande sia la palla che costruiamo, esiste un insieme E t.c. $\exists\, x$ che appartiene sia ad E che al complementare della palla.



"Oggetti che vivono in $\mathbb{R}^n$"

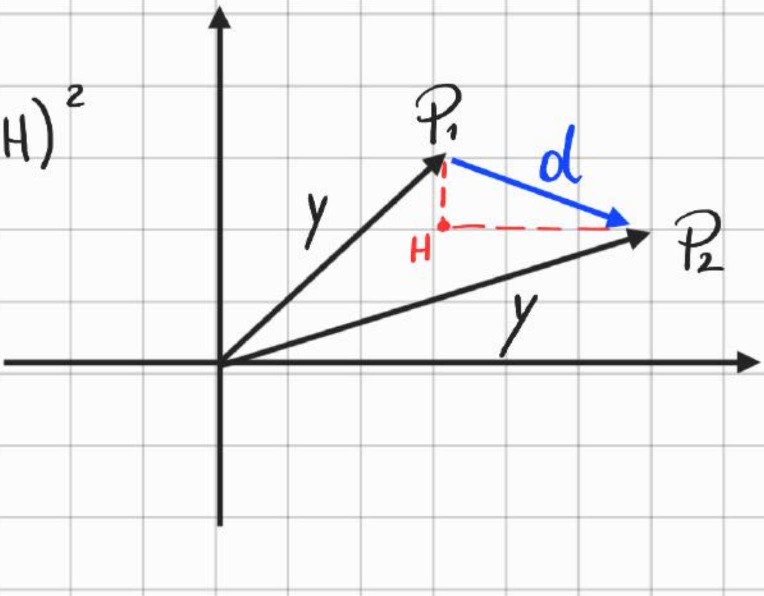


Piano $\mathbb{R}^2$

$P_1 = x = (x_1, x_2)$
$P_2 = y = (y_1, y_2)$

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

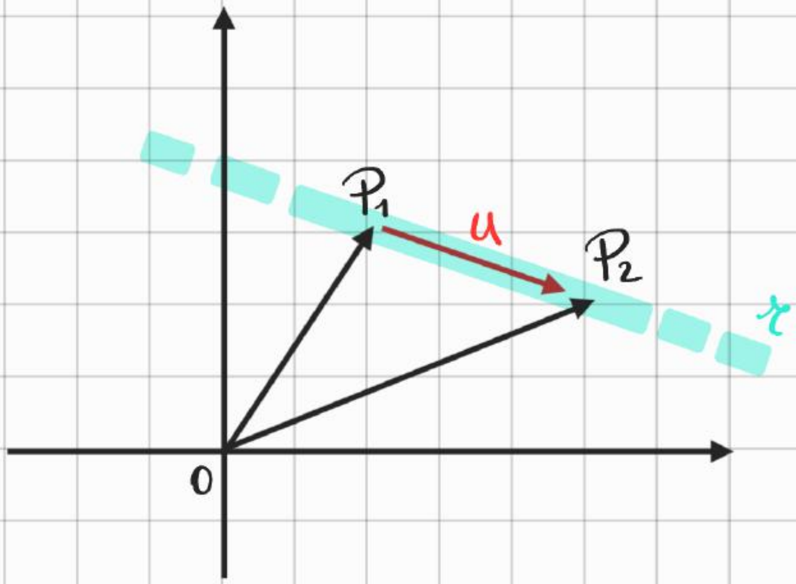
$(P_1 P_2)^2 = (P_1 H)^2 + (P_2 H)^2$



Retta per due punti

$P_1 = (x_1, y_1) = v$
$P_2 = (x_2, y_2) = w$

$u = w - v$



Retta: insieme di punti che ottengo partendo da P_1 e spostandomi in direzione di u.

$$\text{Retta} = \left\{ \underset{t \in \mathbb{R}}{P =} v + tu \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right\}$$

t è un parametro

Forma Parametrica

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$\rightarrow$ Forma Cartesiana

$$x - x_1 = \frac{(y-y_1)(x_2-x_1)}{y_2-y_1} = \frac{y(x_2-x_1)}{y_2-y_1} - \frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2-y_1} =$$

$$x - y\,\frac{(x_2-x_1)}{y_2-y_1} + \frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2-y_1} - x_1 = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

Almeno uno tra a e b deve essere $\neq 0$.

<u>Osservazione</u>

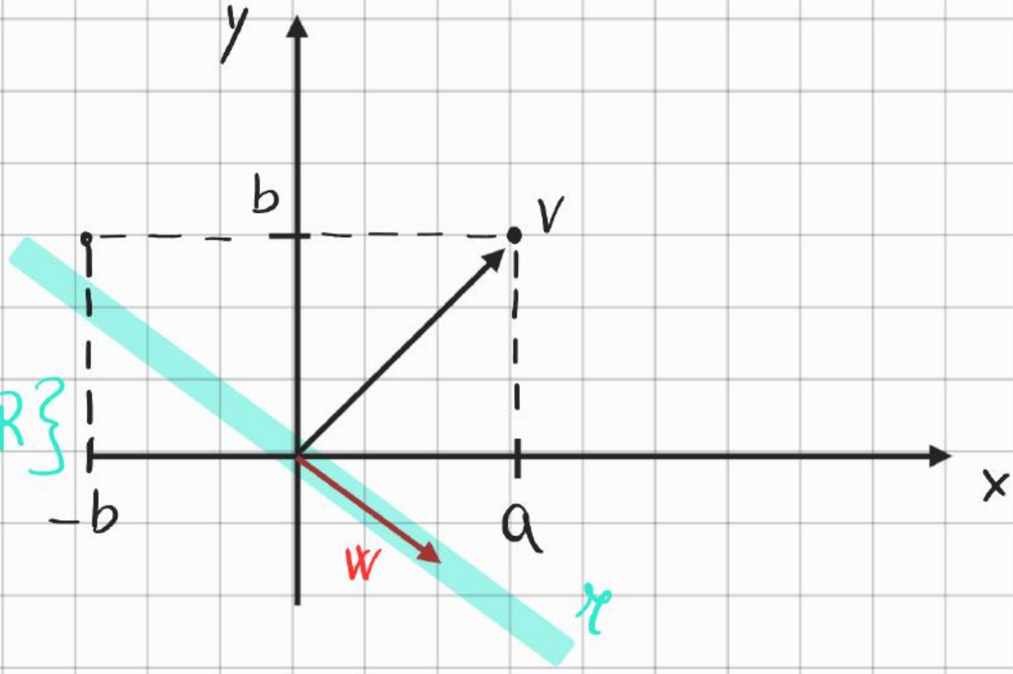
Nella forma $ax+by+c=0$ due equazioni diverse rappresentano la stessa retta $\Leftrightarrow$ sono una multiplo dell'altra

Retta perpendicolare a v passante per l'origine

$$v = (a, b)$$
$a \rightarrow x_1$, $b \rightarrow y_1$

$w \perp v$

$r: \{P = t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$



$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

↳ prodotto scalare

$w = (w_1, w_2)$

Allora $\langle v, w \rangle = \langle (a,b), (w_1, w_2) \rangle = 0$

$$a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = 0$$

Posso scegliere $w_1 = -b$ e $w_2 = a$, in questo modo ottengo:

$$\langle v, w \rangle = a \cdot \underbrace{(-b)}_{w_1} + b \cdot \underbrace{a}_{w_2} = -ba + ba = 0$$

$w = (-b, a)$ é t.c. $w \perp v$

↳ w é determinato da v

$$r = \{P = t \cdot w\} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{t} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}}$$

Parametro

Formule Parametrica

Otteniamo la formula cartesiana:

$$\begin{cases} x = -tb \\ y = ta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{y}{a} \cdot b \\ t = \frac{y}{a} \end{cases} = \boxed{ax + by = 0}$$

Forma Cartesiana

<u>Osservazione</u> $(ax + by = 0)$

Forma cartesiana della retta passante per l'origine

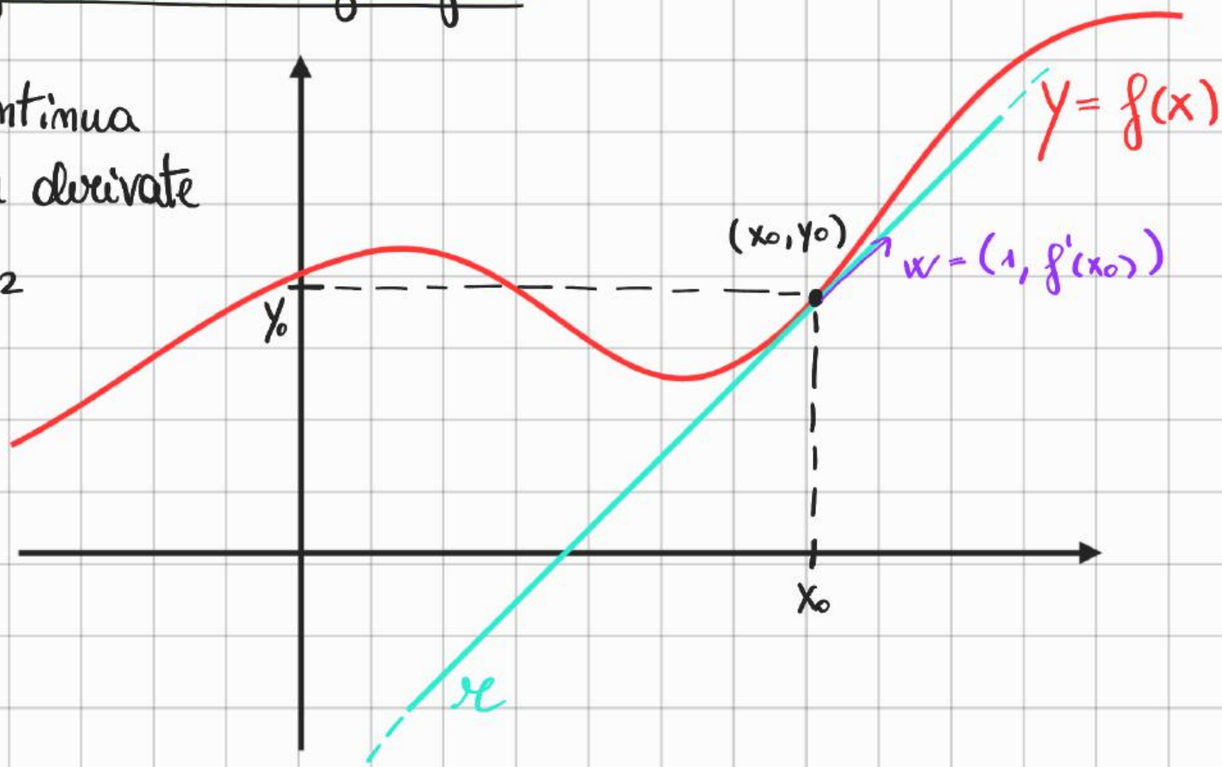
$\Leftrightarrow c = 0$ e $\perp$ a $v = (a, b)$

Data una retta $ax + by + c = 0 \rightarrow v = (a, b)$ è $\perp r$.

Retta Tangente ad un grafico

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua derivabile, con derivate continue.

$graph(f) \subset \mathbb{R}^2$



Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ chiamo $y_0 = f(x_0)$

Sviluppo di Taylor di f in x_0 al primo ordine:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$y = f(x) \rightarrow graph(f)$

Se considero $y = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$ che grafico ottengo?

1) É una retta. $(f'(x_0)x + y - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 0$

2) Passa per (x_0, y_0)

3) Grazie allo sviluppo di Taylor:

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=o(x-x_0)$$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ é la retta tangente al graph(f) in (x_0,y_0)

Riscriviamola nella forma $ax+by+c=0$:

$$y-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=0$$

$$y-f(x_0)-f'(x_0)x+f'(x_0)x_0=0$$

$$-f(x_0)x+y+f'(x_0)x_0-f(x_0)=0 \quad \text{(Forma Cartesiana)}$$

$a=-f'(x_0)$

$v=(a,b)=(-f'(x_0),1)$ é $\perp r$.

$b=1$

$\Rightarrow$ $w=(1,f'(x_0))$ é vettore tangente ad r.
t.c. $\langle v,w\rangle=0$

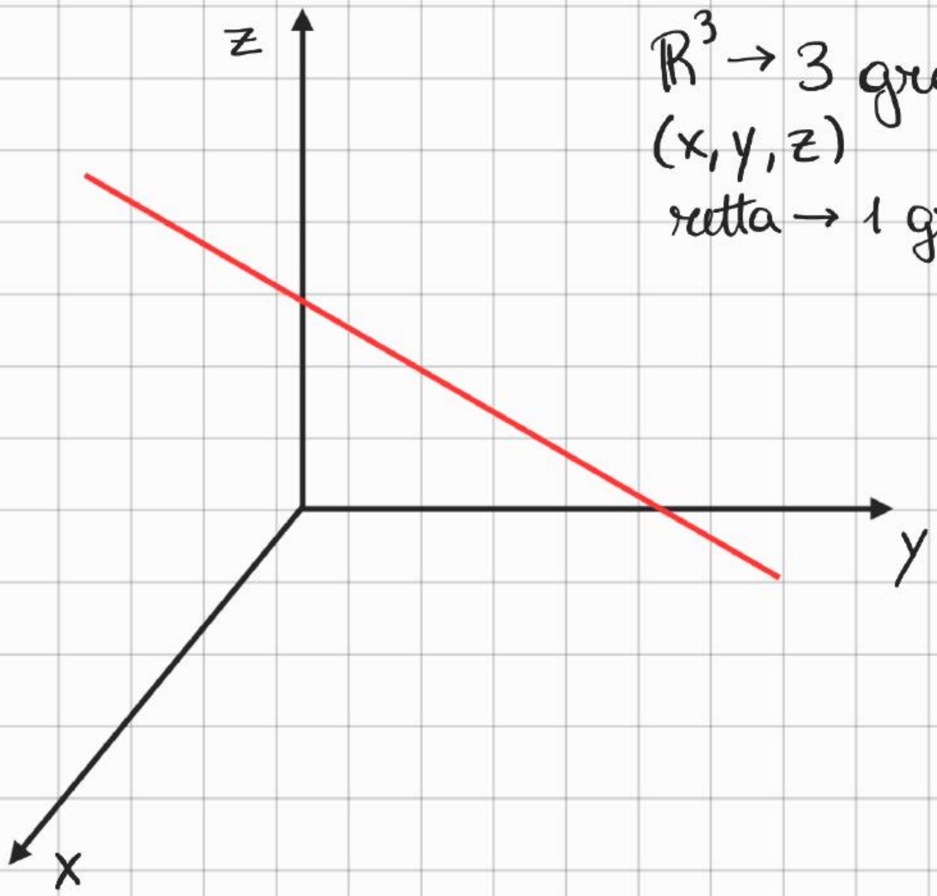
La retta tangente al graph(f) in (x_0,y_0) per definizione é la retta passante per (x_0,y_0) che ha il coefficiente angolare $=f'(x_0)$

Otteniamo la forma parametrica:

$$r:\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\f'(x_0)\end{pmatrix}}_{w}\right\}$$

In $\mathbb{R}^2$ una retta é descritta da una sola equazione.

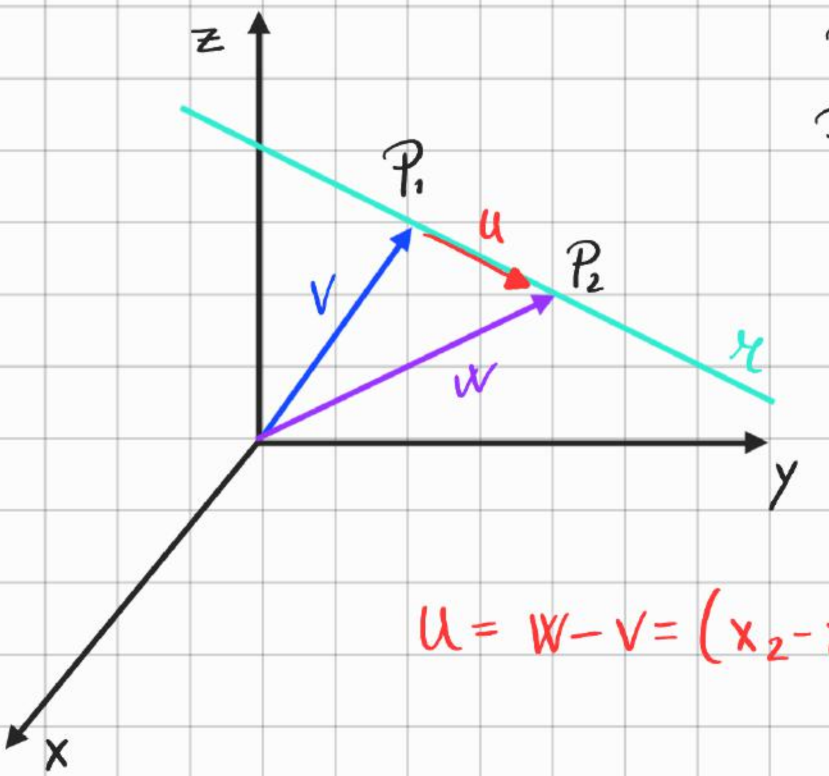
In $\mathbb{R}^3$ (Spazio cartesiano)



$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ 3 gradi di libertá
(x, y, z)
retta $\rightarrow$ 1 grado di libertá

Una retta in $\mathbb{R}^3$ sará descritta da due equazioni

Retta passante per due punti in $\mathbb{R}^3$



$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = v$
$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = w$

$u = w - v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Forma parametrica di r

$$r = \{P = v + t\,u\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

Forma cartesiana di r

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ t = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\[2ex] \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}$$

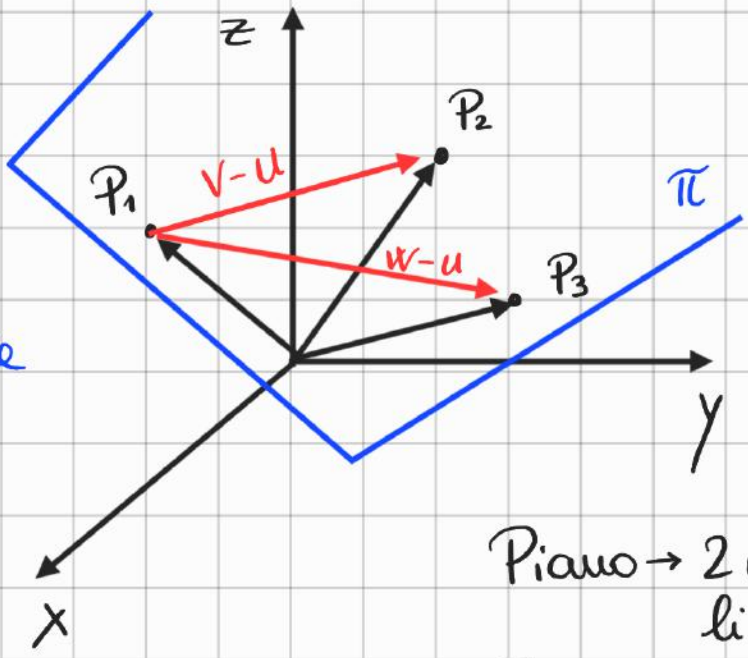
Piano in $\mathbb{R}^3$ passante per tre punti

$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = u$

$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = v$

$P_3 = (x_3, y_3, z_3) = w$

π = piano passante per P_1, P_2, P_3



Piano → 2 gradi di libertà

Spazio → 3 gradi di libertà

$$P_2 - P_1 = v - u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$P_3 - P_1 = w - u = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Forma parametrica di π:

$$\pi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1 + t(v-u) + s(w-u), t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\pi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

Forma cartesiana di π:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t \dfrac{\cancel{x_2 - x_1}}{\cancel{x_2 - x_1}} + s \dfrac{(x_3 - x_1)}{x_2 - x_1} \\[2ex] \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t \dfrac{\cancel{y_2 - y_1}}{\cancel{y_2 - y_1}} + s \dfrac{(y_3 - y_1)}{y_2 - y_1} \\[2ex] \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \dfrac{\cancel{z_2 - z_1}}{\cancel{z_2 - z_1}} + s \dfrac{(z_3 - z_1)}{z_2 - z_1} \end{cases}$$

$\mathrm{I} - 2\mathrm{II}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = s\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right) \\[2ex] \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = s\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)} \\[4ex] s = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)} \end{cases}$$

$$\dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)}$$

equazione lineare $\rightarrow$ equazione cartesiana passante per P_1, P_2, P_3.

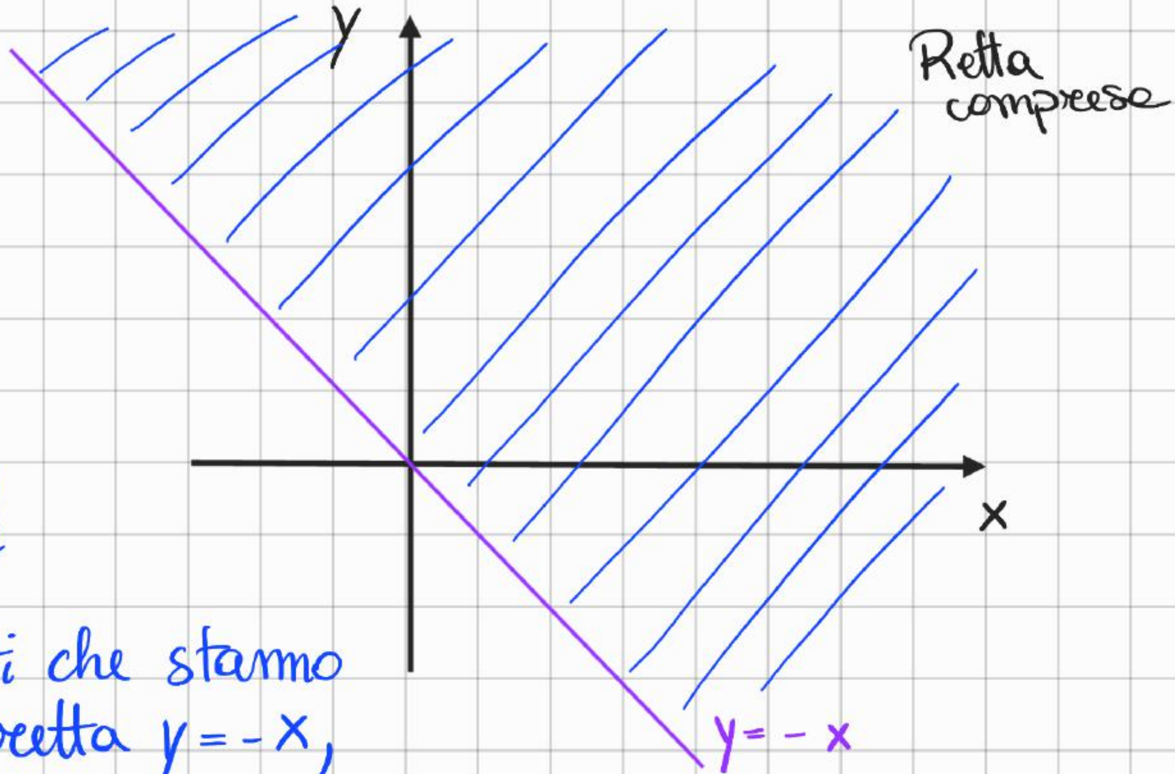
Insiemi nel piano

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y) \geq 0\}$

$y = -x$

$y \geq -x$

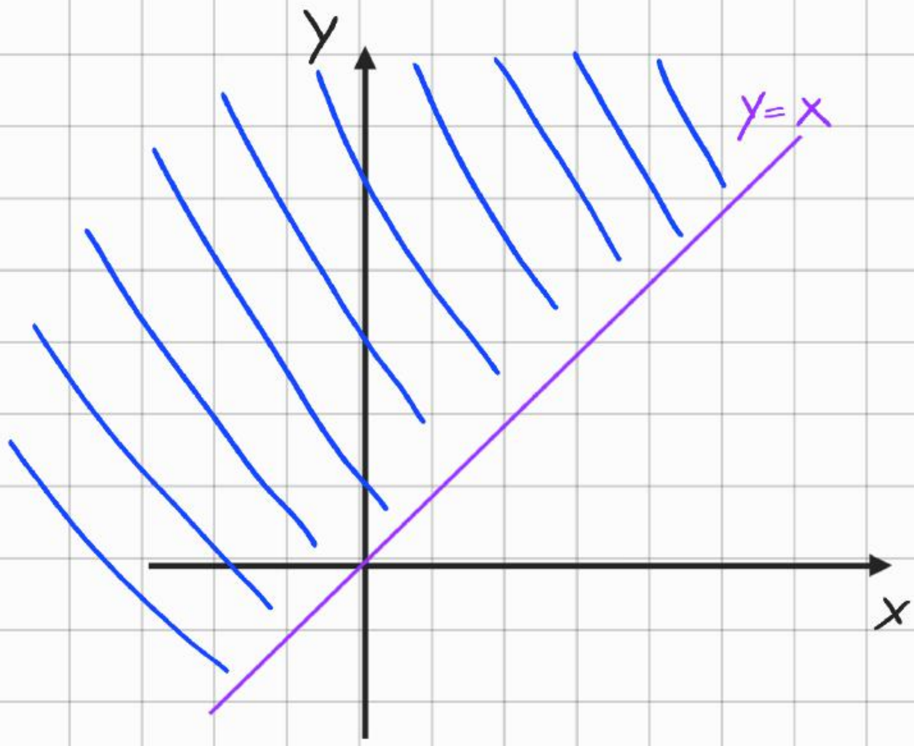
Sono i punti che stanno sopra la retta $y=-x$, retta compresa



- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 0\}$

$y = x$

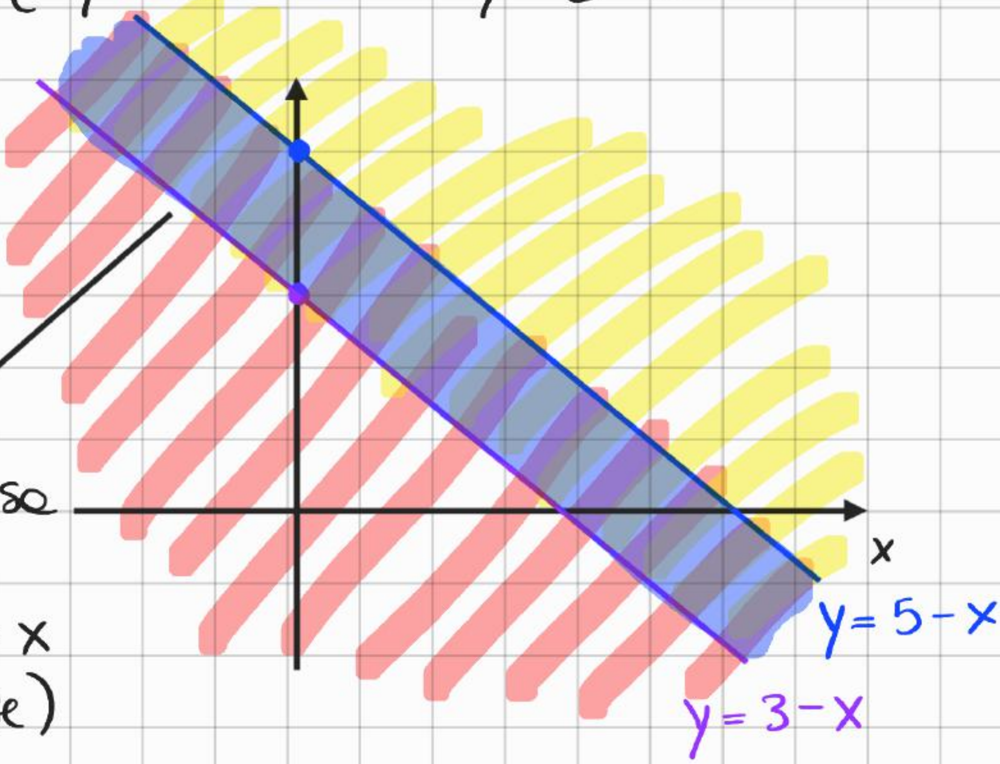
$y \geq x$



• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le x+y \le 5\}$

Abbiamo due condizioni che devono essere verificate contemporaneamente.

$$\begin{cases} x+y \ge 3 \\ x+y \le 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 3-x \longrightarrow y = 3-x \\ y \le 5-x \longrightarrow y = 5-x \end{cases}$$

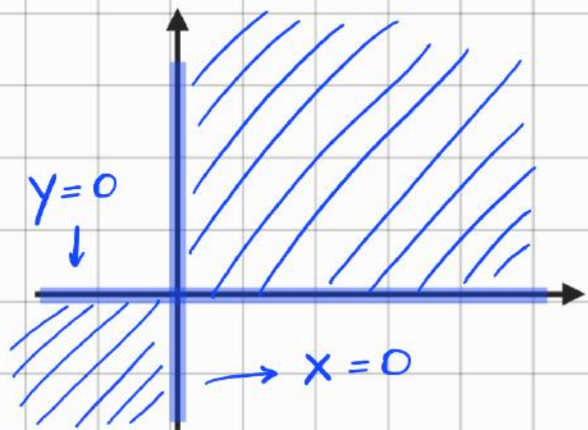


Descrive una striscia compresa tra la retta $y = 3-x$ e $y = 5-x$ (rette comprese)

• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \ge 0\}$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$$

X ed y devono avere lo stesso segno.

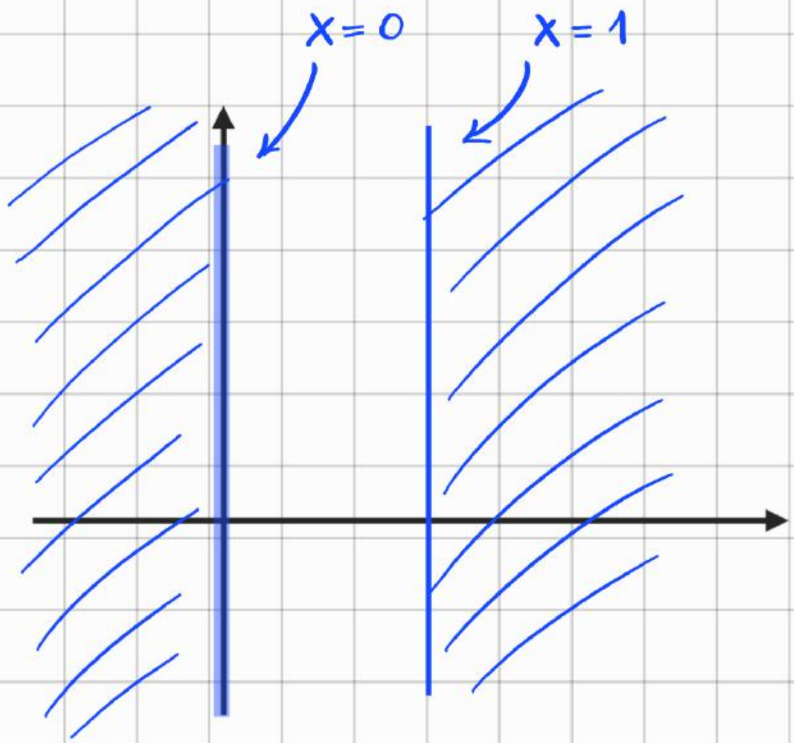


- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x \geq 0\}$

$x(x-1) \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ Entrambi i membri devono essere concordi

$x \geq 1$ $x \leq 0$

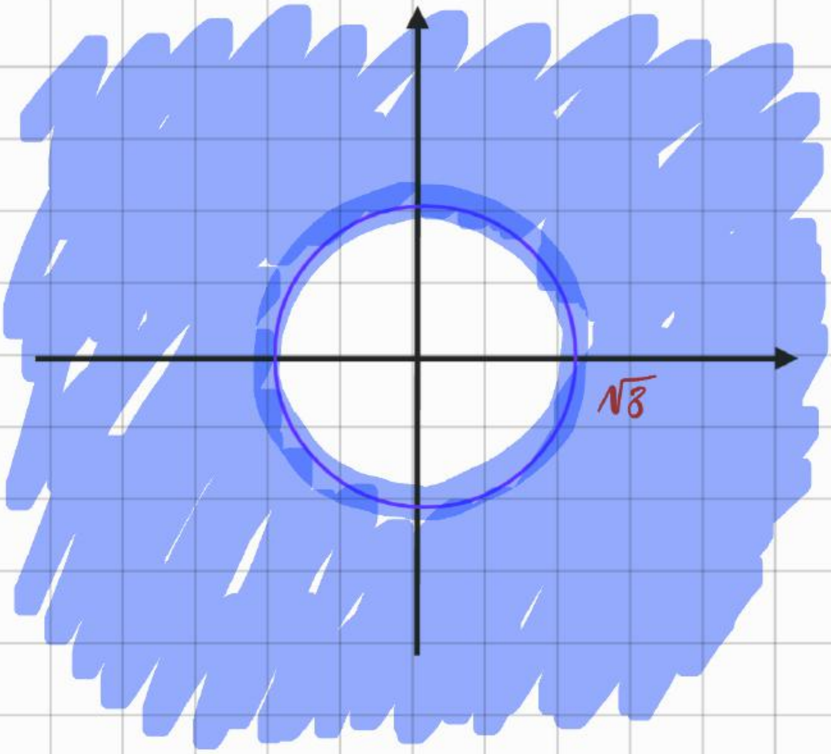


- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 8\}$

$d((x,y),(0,0)) = |(x,y) - (0,0)| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$

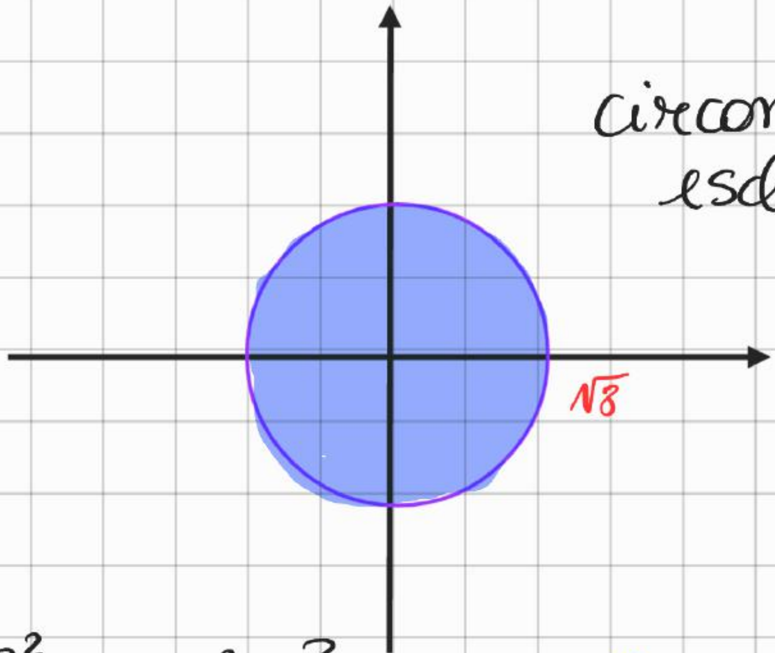
$x^2 + y^2 \geq 8 \iff d((x,y),(0,0)) \geq \sqrt{8}$

$x^2+y^2=8$



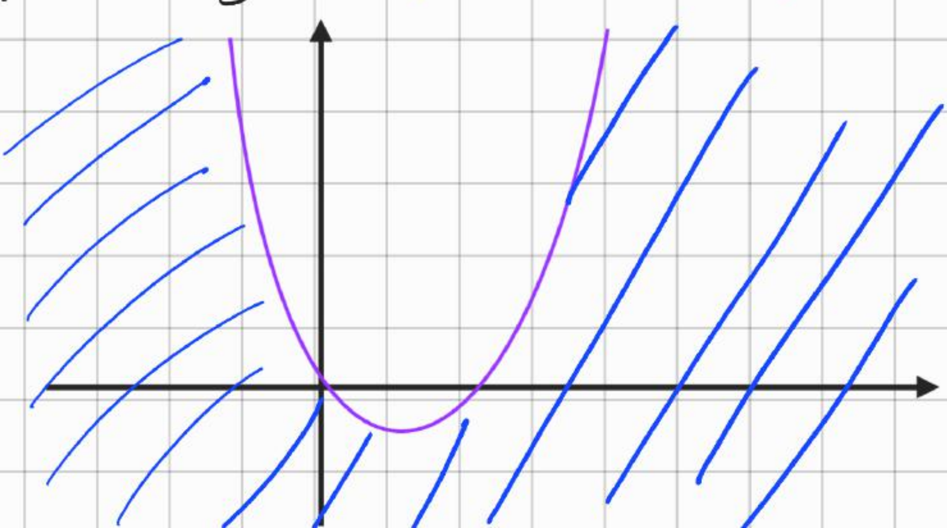
circonferenza inclusa

• $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 8\}$



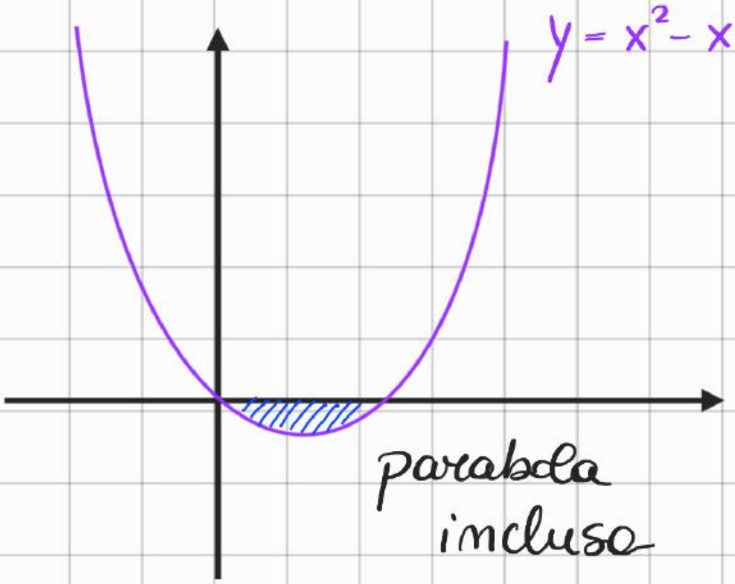
circonferenza esclusa

• $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \le x^2-x\}$ $\quad y = x^2 - x$ parabola



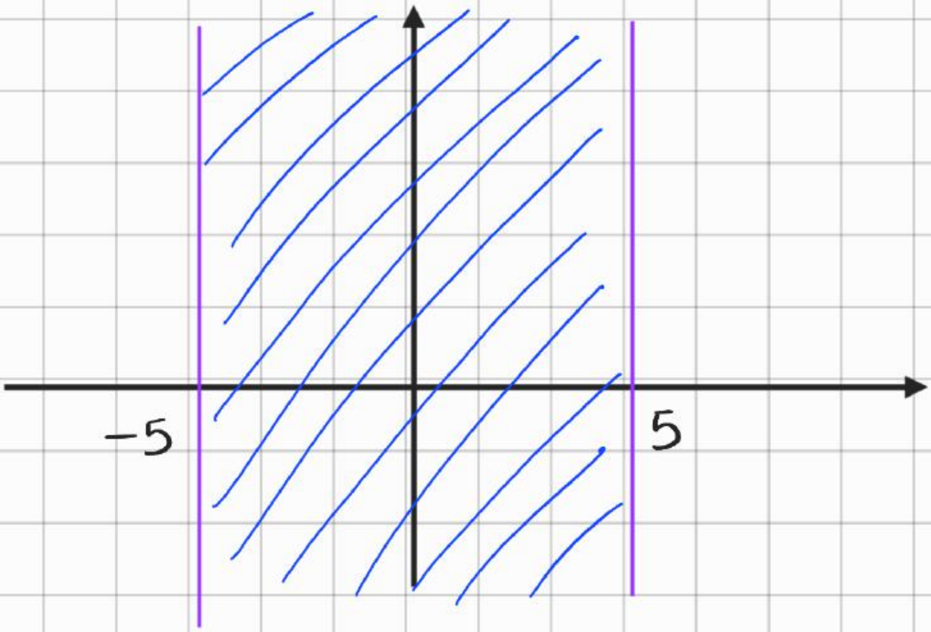
parabola inclusa

• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x \le y \le 0\}$



• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 5\}$

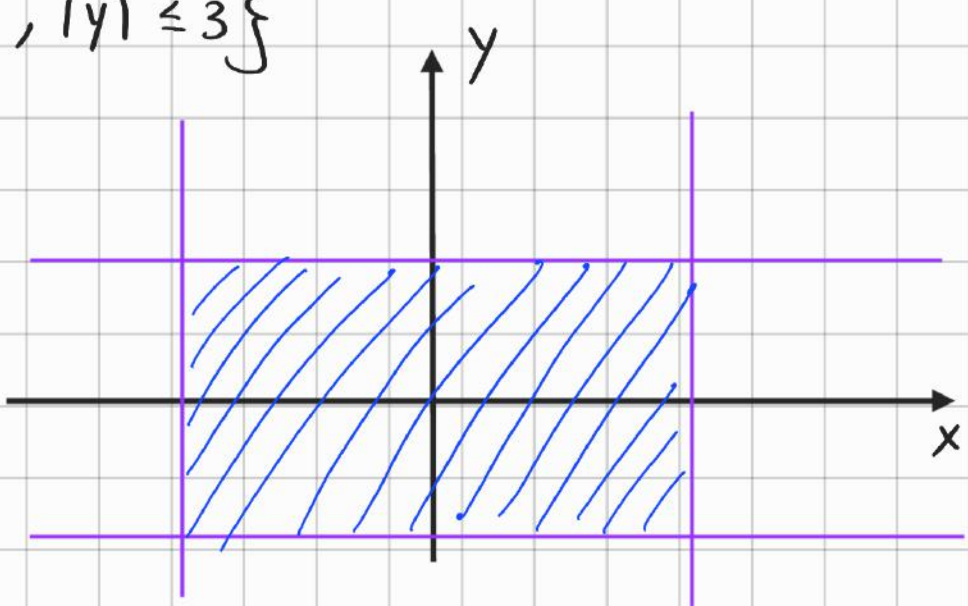
$-5 \le x \le 5$



• $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 5 , |y| \le 3\}$

$-5 \le x \le 5$

$-3 \le y \le 3$



Curva

Definizione

Una curva nel piano è una funzione:

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$
$I \subseteq \mathbb{R}$

Se $I = [a,b]$ allora:

Definizione

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

N.B. $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 \qquad t \in I$

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

Esempio

$\gamma(t) = (t^2 + 1, 3t - 2) \quad t \in [0,3]$ è una curva.

$[a,b] = [0,3]$

$x(t) = t^2 + 1$
$y(t) = 3t - 2$ $\longrightarrow$ Per ogni $t \in [0,3]$ la curva γ individua un punto del piano.

In sintesi una curva rappresenta un punto che si muove nel piano.

Definizione

Una curva é una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$

Esempio

$$\gamma(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x : I \to \mathbb{R} \\ y : I \to \mathbb{R} \\ z : I \to \mathbb{R} \end{array}\right\} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

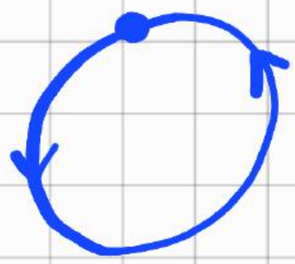
Definizione

Una curva si dice semplice se non ritorna mai su se stessa (tranne se é chiusa).

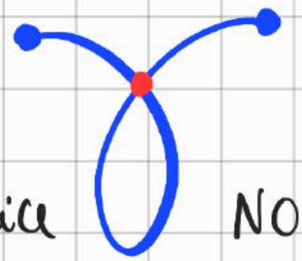
Esempio

Semplice (NON chiusa)

$\gamma(a) \neq \gamma(b)$



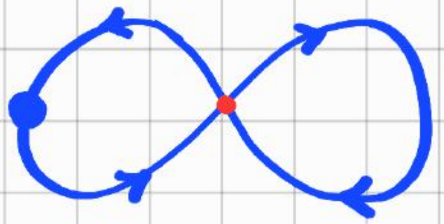
Semplice e chiusa



NON semplice

NON chiusa

$\exists\, t_1 \neq t_2 : \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$



Chiusa
NON semplice

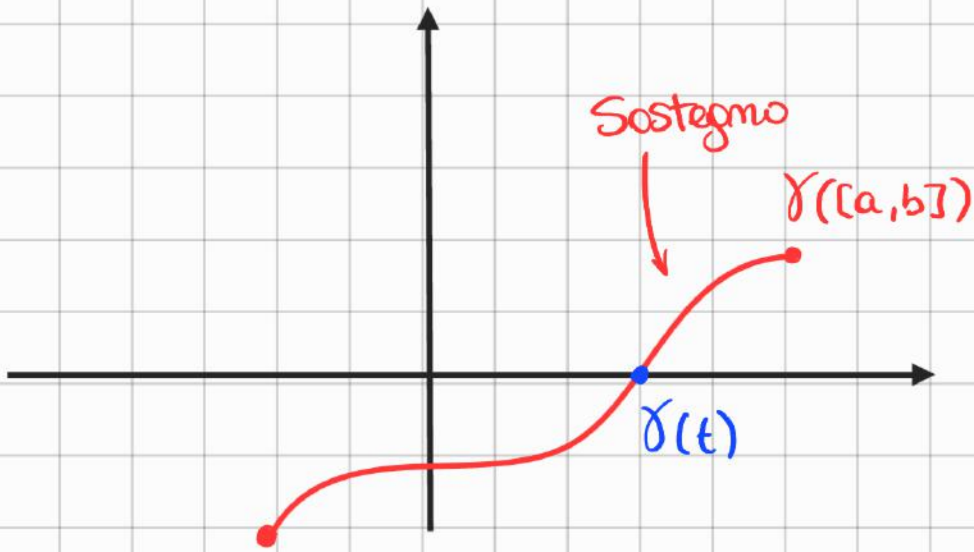
Definizione

Si dice sostegno di una curva, l'immagine della curva stessa, cioè la traiettoria percorsa dal punto.

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^2$

Immagine di γ



t "tempo" $\longrightarrow$ $\gamma(t)$ punto in $\mathbb{R}^2$ dove si trova la curva al punto t.

Definizione

Sia $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$), si dice vettore tangente alla curva il vettore:

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Definizione

La ==retta tangente== ad una curva in un punto é quella retta che passa per quel punto ed ha come direzione il vettore tangente alla curva nel punto stesso.

Esempio

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$x(t) = \cos t$
$y(t) = \sin t$

$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

$x^2(t) + y^2(t) = 1$

Il sostegno di γ é la corrispondenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

$\forall t \in [0, 2\pi] \ \gamma(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\gamma(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) \qquad \gamma(2\pi) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$

$\gamma : [0, 2\pi]$

Quindi $\gamma(0) = \gamma(2\pi) \longrightarrow$ curva chiusa

$r: \gamma(t) + s\,\gamma'(t)$

Funzioni in più variabili

Definizione

Una funzione é una terna di oggetti Ω, B, f, dove Ω e B sono insiemi.

Ω si dice Dominio, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
B si dice CoDominio, $B \subseteq \mathbb{R}$
f é una legge che lega gli elementi di Ω a quelli di B.

$f: \Omega \to B$ mette in corrispondenza ogni elemento di Ω con un solo elemento di B.

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x^2 - y + xy$

$x, y \in \mathbb{R} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

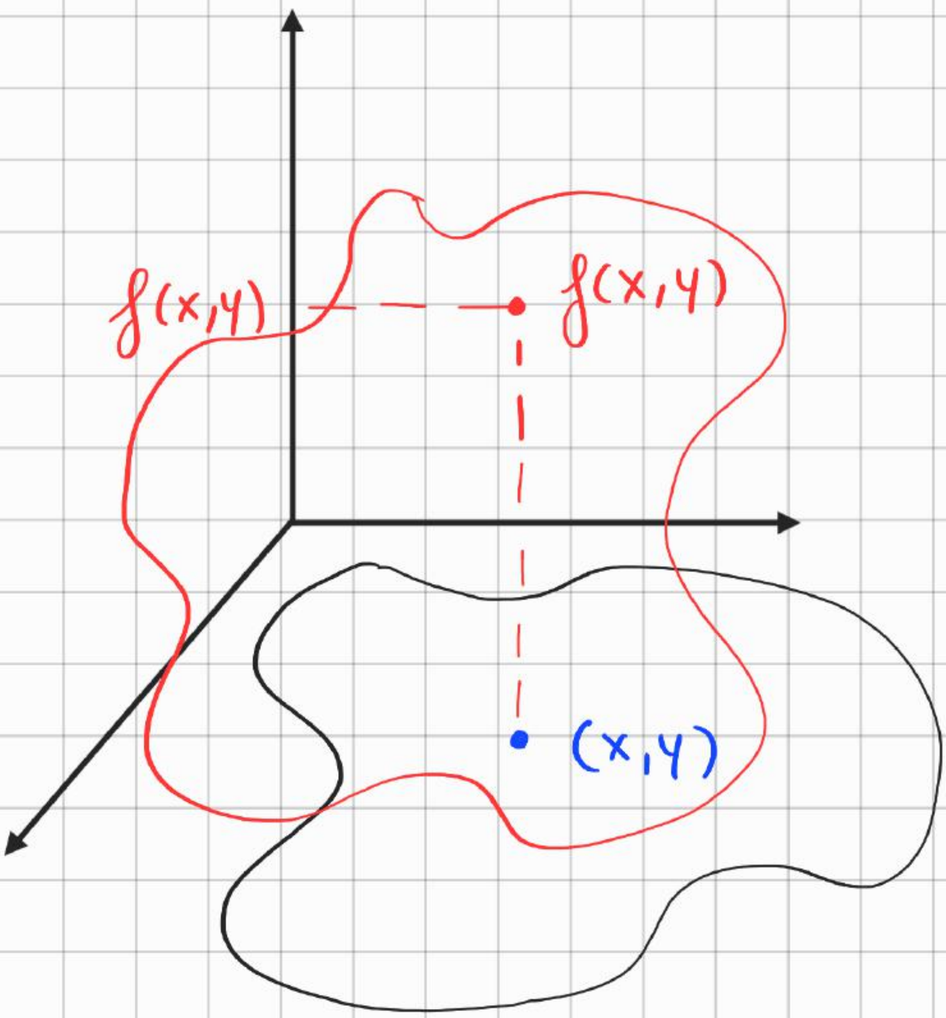
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = x + z$

$z \in \mathbb{R}$

$f: \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Grafico di f

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y)}_{\text{vivono nel piano } xy} \in \Omega,\ z = f(x,y)\}$$



Osservazione

Il dominio é il piú grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dove f é definita.

Insiemi di livello

$n = 2$ linee di livello

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello corrispondente a λ é:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$ Insieme di livello λ per f

Se $\lambda < 0 \longrightarrow \emptyset$

$\lambda = 0 \longrightarrow (0,0)$

$\lambda > 0 \longrightarrow$ trovo la circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato

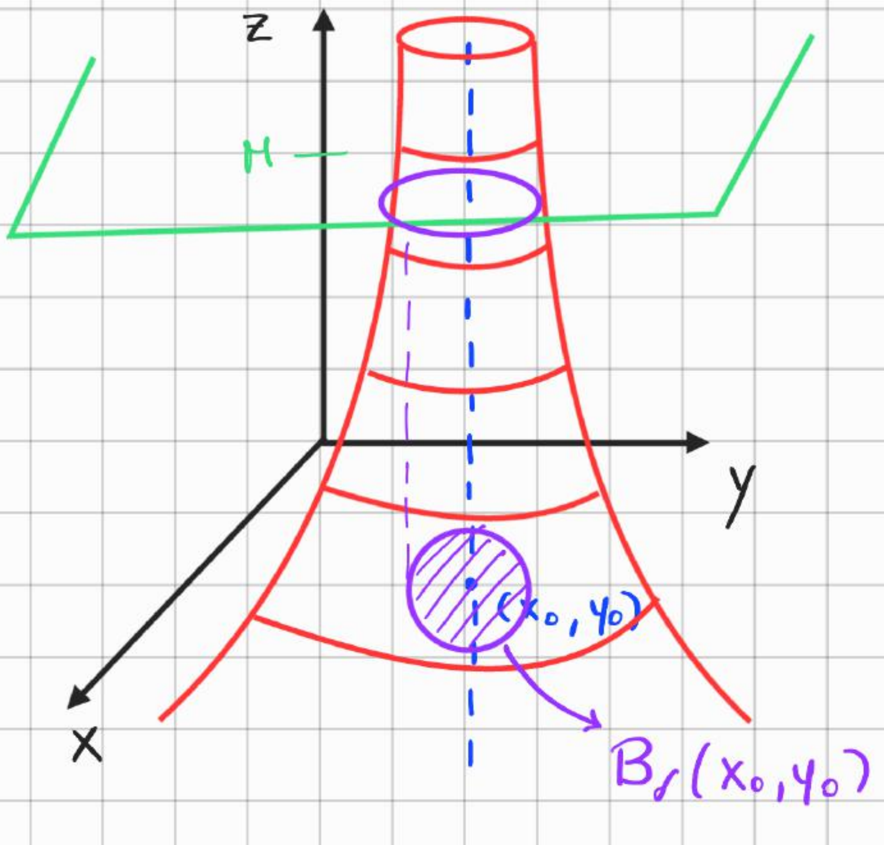
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2} f(x) \quad \Big\} \quad ?$$

Ci sono quattro possibilitá :

1) $\exists$ lim ed é finito
2) $\exists$ lim ed é $= +\infty$
3) $\exists$ lim ed é $= -\infty$
4) $\nexists$ lim

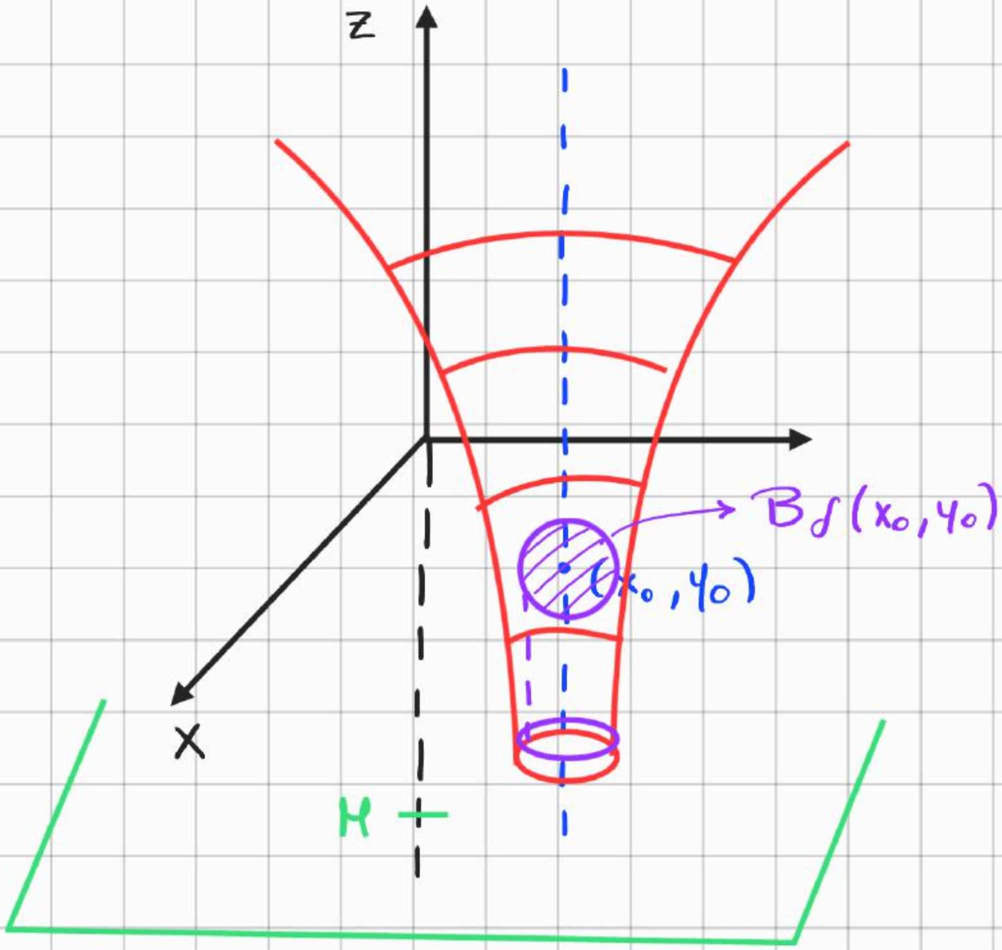
Definizione (2)

Si dice che $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x,y) > M \ \forall x \in B_\delta((x_0,y_0)) \setminus \{(x_0,y_0)\}$



Definizione (3)

Si dice che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in B_\delta((x_0,y_0)) \setminus \{(x_0,y_0)\}$



Definizione (1)

Si dice che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x,y) - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$

Definizione

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice **continua** in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ($x$ é un vettore di $\mathbb{R}^n$)

Definizione

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continua in $\mathbb{R}^n$ se é continua $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Regola

Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari usando operazioni algoritmiche e/o composizioni é continua dove non presenta problemi di "esistenza".

Osservazione

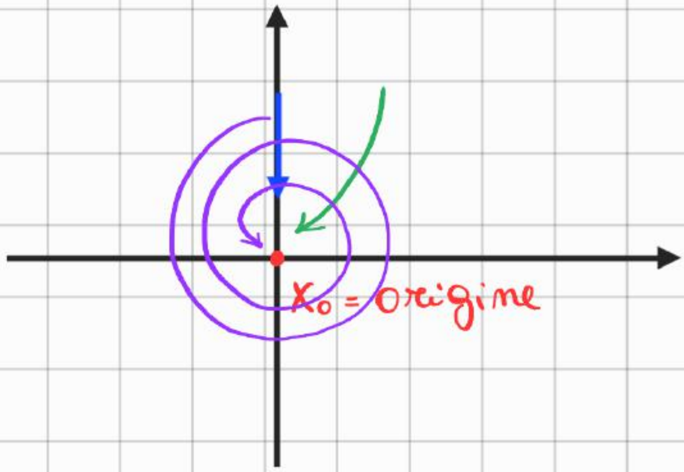
Gli strumenti standard per il calcolo dei limiti studiati nell'Analisi di funzioni in una variabile continuano ad essere validi per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Osservazione

Anche se la struttura della definizione del limite rimane inalterata (valore assoluto $\leftrightarrow$ norma) il calcolo del limite nelle funzioni in più variabili é comunque più complicato.

In $\mathbb{R}$ x tende ad un punto x_0 lungo una direzione fissata.

In $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^2$ può tendere ad un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con n gradi di libertà.



Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x,y), (0,0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \qquad (x_0,y_0)=(0,0)$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \nexists$$

perché a seconda della direzione di "avvicinamento" il limite cambia, andando contro l'unicità del limite.

- lungo l'asse x: $y=0$ $\quad f(x,0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

• lungo l'asse y : $x=0$ $\quad f(0,y)=0$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$$

• lungo la bisettrice $y=x$: $f(x,x)=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{2}$$

In ogni palla di centro $(0,0)$ trovo punti in cui f vale 0 e punti in cui f vale $\frac{1}{2}$ quindi non può esistere limite.

Per dimostrare che un limite non esiste é sufficiente trovare due direzioni di avvicinamento in cui il limite é diverso.

In $\mathbb{R}^n$ i limiti di funzioni in più variabili spesso non esistono.

Attenzione: Trovare diverse direzioni, ottenendo sempre lo stesso limite NON basta per concludere che il limite esista, potrebbe esistere infatti una direzione che non ho controllato che mi da limite diverso.

Esempi di calcolo del limite

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^6}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

Notiamo che $\frac{x^2 y^6}{x^2+y^2} \geq 0$ e $= y^6 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}$

≤ 1 perché den $\geq$ num

Quindi $\underset{\downarrow}{0} \leq \underset{\downarrow}{f(x,y)} \leq \underset{\downarrow}{y^6}$ Tendono tutti e tre a 0 per $(x,y)\to(0,0)$

$\quad\;\; 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0$

Usiamo il Teorema dei Carabinieri per concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

Usiamo il cambio di variabili:

Pongo $t = x^2+y^2$

Quando $(x,y)\to(0,0)$ ho che $t\to 0$, quindi riscrivo il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

Segue che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$ NON posso dire che $f(x,y) \geq 0$

Usiamo la regola del valore assoluto:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Se $|f(x,y)| \to 0$ allora anche $f(x,y) \to 0$

$$\left(\underset{\downarrow \atop 0}{-|f(x,y)|} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{f(x,y)} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{|f(x,y)|}\right)$$ Per il teorema dei Carabinieri.

≤ 1 perché den $\geq$ num

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \longrightarrow \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = |y| \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\longrightarrow \underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{|f(x,y)|} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{|y|}$$

$0 \to 0$ essendo una costante, se $(x,y)\to(0,0)$ allora $y \to 0$ e quindi $|y| \to 0$. Per il teorema dei carabinieri anche $|f(x,y)| \to 0$.

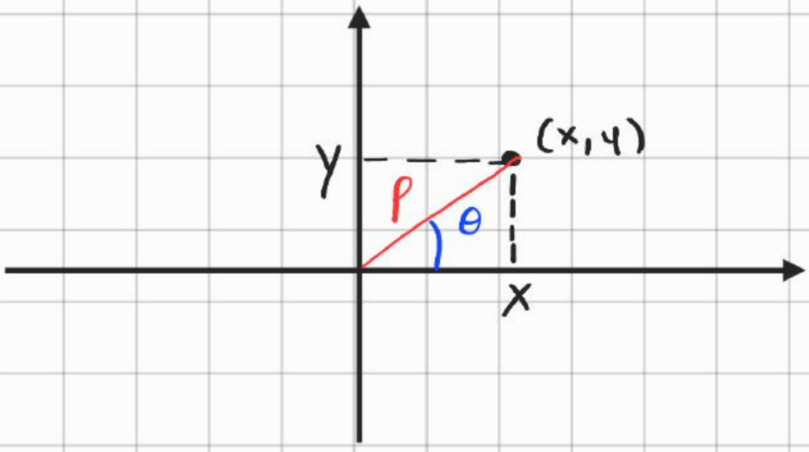
Possiamo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

4) Metodo delle coordinate polari

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ coordinate cartesiane

$(\rho, \theta) \in \mathbb{R}$ coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$



Vantaggio: $(x,y) \to (0,0)$ in termini di coordinate polari diventa $\rho \to 0$.

ρ = distanza del punto (x,y) dall'origine

θ = angolo che ρ forma con l'asse delle x.

Proviamo ad esprimere la precedente funzione in termini di coordinate polari:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \begin{matrix} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{matrix}$$

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^2 \cos\theta \cdot \rho \sin\theta}{\rho^2\cos\theta + \rho^2 \sin\theta} = \frac{\cancel{\rho^3} \cos^2\theta \cdot \sin\theta}{\cancel{\rho^2}}$$

$$f(\rho,\theta) = \rho \cos^2\theta \cdot \sin\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} f(\rho,\theta)$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \rho\,\overbrace{\cos^2\theta}^{\le 1}\cdot\overbrace{\sin\theta}^{-1\le \sin\theta\le 1}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow\\0}}{-\rho} \le \underbrace{\rho\cos^2\theta\cdot\sin\theta}_{\substack{\downarrow\\0}} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\rho}$$

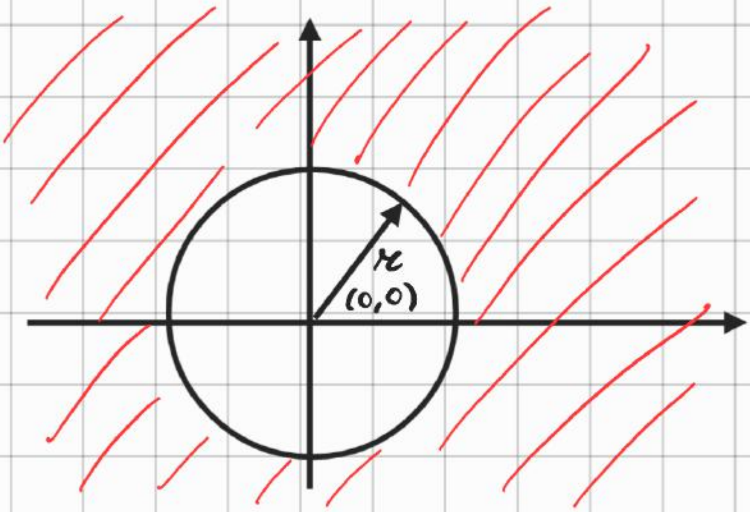
Dato che $-\rho\to 0$ e $\rho\to 0$, per il teorema dei Carabinieri anche $\rho\cos^2\theta\cdot\sin\theta\to 0$.

Come si estende la nozione di lim al caso in cui $(x,y)\longrightarrow\infty$?

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \ell \quad ?$$

Cosa vuol dire che $(x,y)\to\infty$?

Ricordiamo che un <u>intorno</u> di raggio r di ∞ è il complementare di $B_r((0,0))$.



$(x,y)\to\infty$ se
$d((x,y),0)\to+\infty$
oppure $x^2+y^2\to+\infty$
oppure $\rho\to+\infty$

In sintesi $(x,y) \to \infty$ se una delle tre opzioni vale.

Definizione

$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno di ∞ t.c. se $(x,y) \in$ intorno allora $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $(x,y) \notin B_\delta(0,0)$ allora $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Definizione

$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ se $\forall\, M > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, (x,y) \notin B_\delta(0,0)$ vale che $f(x,y) \geq M$.
$f(x,y) \leq M$.

Anche nel caso di $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$:

- Se esistono due direzioni con limite diverso $\to \nexists \lim$.
- Le coordinate polari possono semplificare il calcolo.

Esempio

- $$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2} = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$$

Scelgo come direzione di avvicinamento a ∞ l'asse x, quindi $y=0$.

$$(x,y)\to\infty \overset{y=0}{\Longleftrightarrow} x^2\to+\infty \Longleftrightarrow d(\underset{\underset{y=0}{\uparrow}}{(x,0)},(0,0))\to+\infty$$

$$f(x,y)=\frac{y^6}{1+x^2+y^2}$$

$$f(x,0)=\frac{0}{1+x^2}=0 \longrightarrow$$ valore del $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ lungo l'asse x.

Scelgo come direzione di avvicinamento a ∞ l'asse y quindi $x=0$.

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=\lim_{y^2\to\infty}\frac{y^6}{1+y^2}=\frac{t^3}{1+t}=+\infty \quad t=y^2$$

Lungo l'asse x, $\lim=0$, lungo l'asse y, $\lim=+\infty$. Quindi ho trovato due direzioni con diversi valori e posso concludere che $\nexists$ lim.

- $$\lim_{(x,y)\to\infty} x\cdot y\cdot e^{-(x^2+y^2)}=\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)=\lim_{\rho\to\infty} f(x,y)$$

$$=\lim_{d((x,y),(0,0))\to\infty} f(x,y)$$

Usiamo le coordinate polari:

$x = \rho \cos\theta \qquad x^2 + y^2 = \rho^2$
$y = \rho \sin\theta$

$$f(\rho, \theta) = \rho\cos\theta \cdot \rho \cdot \sin\theta \cdot e^{-\rho^2} = \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}$$

dipende da ρ

$$\lim_{\rho \to \infty} f(\rho, \theta) = \lim_{\rho \to \infty} \underbrace{\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(\sin\theta\cos\theta)}_{\text{è limitato}} = 0$$

Quindi $\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$ perché e^{ρ^2} tende a $+\infty$ più velocemente.

$$\lim_{\rho \to \infty} f(\rho, \theta) = 0 = \lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = 0$$

Calcolo differenziale

In una variabile ...

Definizione

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \to 0.$$

Teorema

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 $\iff$ f è differenziabile in x_0 e

$d = f'(x_0)$.

Se f é derivabile in x_0 allora f è anche continua in x_0.

In più variabili...

Derivata parziale $\longrightarrow$ Teniamo fissa una variabile in $\mathbb{R}^2$ e lasciamo variare l'altra.

Definizione

Data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si dice che f é derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) se:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ esiste ed é finito.}$$

$\longrightarrow$ rapporto incrementale sulla variabile x

Definizione

Se tale limite esiste ed é finito, si dice derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile x e si indica con una delle seguenti notazioni.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0)$$

Analogamente (rispetto ad y)

Definizione

Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto ad y nel punto (x_0, y_0) se:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$$ esiste ed è finito.

rapporto incrementale sulla variabile y

Definizione

Se tale limite esiste ed è finito, si dice derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile y e si indica con le seguenti notazioni.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0)$$

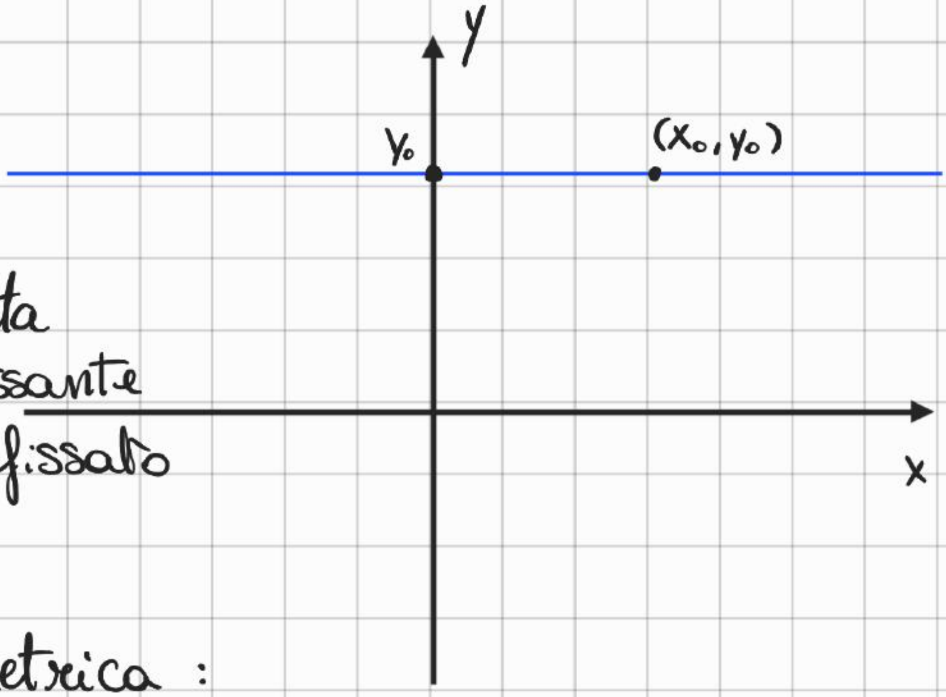
Osservazione

I limiti coinvolti nelle definizioni di derivata parziale sono limiti in una variabile (in $\mathbb{R}$) ovvero:

$\lim_{t \to 0}$ sulla retta reale.

Geometricamente

- $f_x(x_0, y_0)$



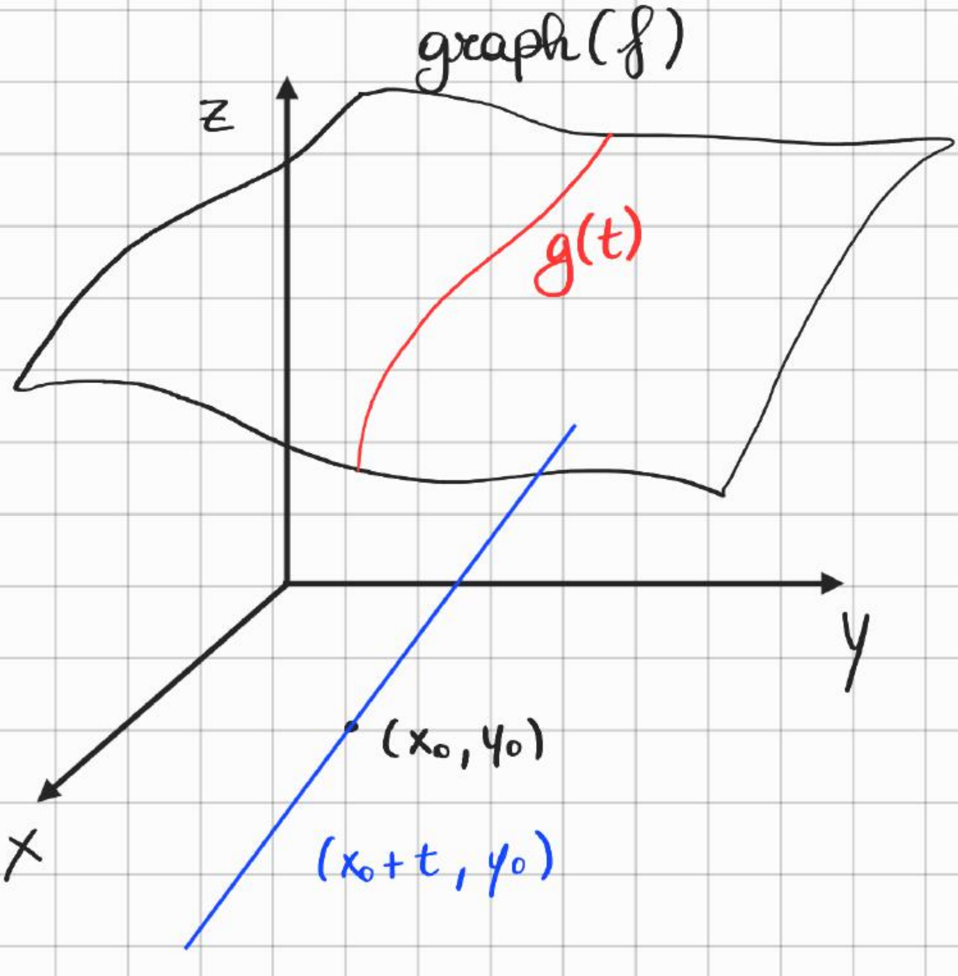
Consideriamo la retta sull'asse delle x e passante per (x_0, y_0): y_0 resta fissato e lascio variare x.

In equazione parametrica:

$$(x_0, y_0) + t(1,0) = (x_0 + t, y_0)$$

Guardo la funzione f ristretta a questa retta

$$f(\underset{\downarrow \atop x}{x_0 + t}, \underset{\downarrow \atop y}{y_0}) = g(t)$$



$g(t) \rightarrow$ geometricamente $g(t)$ é l'intersezione del grafico di $f(x,y)$ con il piano $\perp$ al piano xy e contenente la retta $(x_0+t,\, y_0)$.

La derivata di $g(t)$ in $t=0$ é $g'(0)$ ed é proprio $f_x(x_0,y_0)$

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t}}_{g'(0)} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}}_{f_x(x_0,y_0)}$$

Analogamente per $f_y(x_0,y_0)$

$\hookrightarrow h(t) = f(x_0, y_0+t)$

$h'(0) = f_y(x_0,y_0)$

Nel caso di funzioni da $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ esistono due derivate parziali f_x, f_y.

<u>Definizione</u>

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice <u>derivata parziale</u> di f rispetto alla variabile x_K se:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\,e_K)-f(x_0)}{t}$$ esiste ed é finito.

Tale limite viene indicato con: $\dfrac{\partial f}{\partial x_K}(x_0)$

Osservazione

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0K}, x_{0n})$, $f(x_0 + t e_K)$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ genera l'asse x_1
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ genera l'asse x_2
$\vdots$
$e_K = (0, \dots 1, 0, \dots, 0)$ genera l'asse x_K
$e_n = (0, \dots, 0, \dots, 1)$ genera l'asse x_n

$f(x_0 + t e_K) \longrightarrow$ aggiungo t solo sulla K-esima variabile

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\downarrow$
n direzioni $\longleftrightarrow$ n vettori della base canonica.

Una funzione di n variabili ha n derivate parziali.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Derivata direzionale

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ un vettore di $\mathbb{R}^2$ non nullo ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).
Allora il limite:

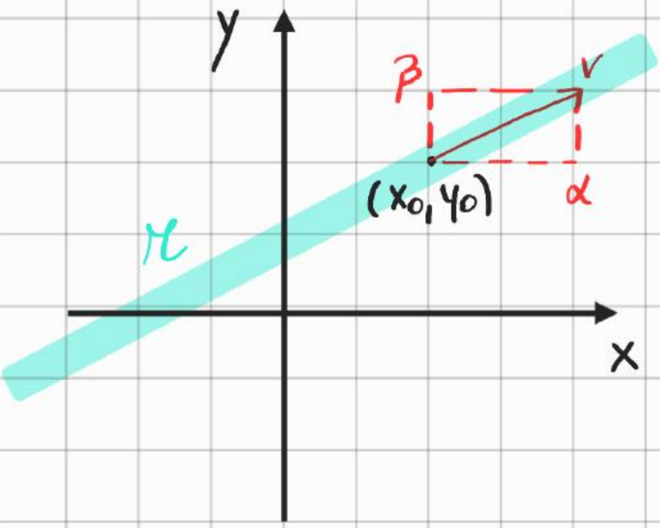
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$ esiste ed é finito.

Si dice derivata direzionale di f in (x_0, y_0) rispetto alla direzione $v = (\alpha, \beta)$ e si indica con:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

Interpretazione geometrica

Derivata direzionale <=> geometricamente corrisponde a muoversi lungo la retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(\alpha, \beta) = (x_0 + \alpha t), y_0 + \beta t)$



Definizione

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Osservazione

Anche le derivate direzionali sono definite tramite limiti in una variabile.

Definizione

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si dice gradiente di $f(x,y)$ in (x_0, y_0) il vettore che come componenti le derivate parziali di f in (x_0, y_0) e si indica con:

$$\text{Nabla} \leftarrow \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Definizione

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Differenziabilitá

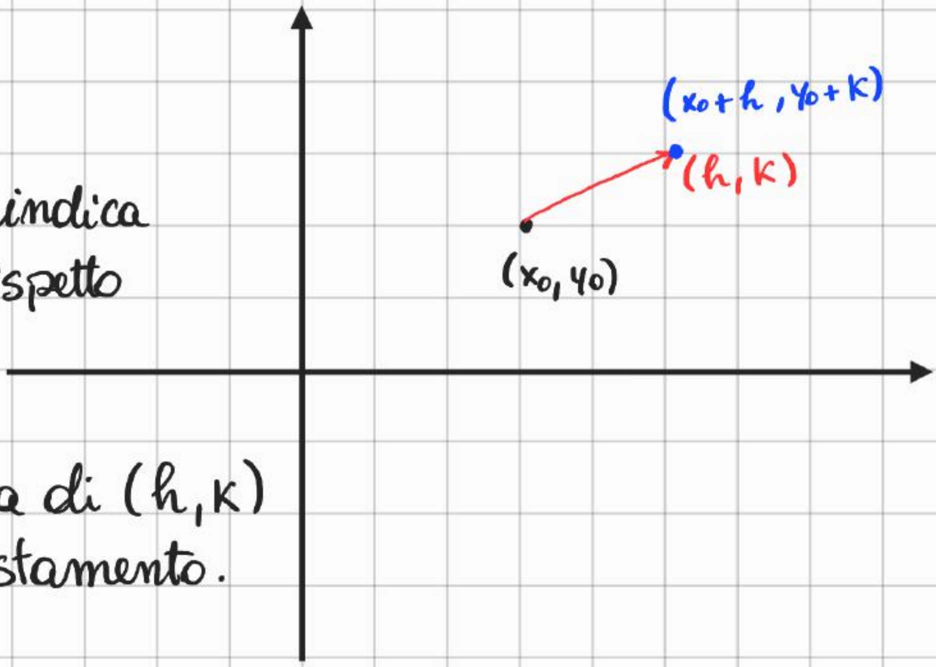
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f é differenziabile in (x_0, y_0) se esistono due numeri reali α e β t.c.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha \cdot h + \beta \cdot k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

$\alpha h + \beta k = \langle \underbrace{(\alpha, \beta)}, \underbrace{(h, k)} \rangle$ (prodotto scalare)

(α,β): devono esistere per avere la differenziabilità di f.

(h,k): spostamento rispetto al punto (x_0, y_0).



Il vettore (h,k) indica lo spostamento rispetto al punto (x_0,y_0)

$\sqrt{h^2+k^2}$ = lunghezza di (h,k) = lunghezza spostamento.

Osservazione

$o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ significa che $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Definizione

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (devono esistere n numeri reali $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) t.c. posso scrivere $f(x_0+h) = f(x_0) + \underset{\alpha h}{\langle \alpha, h \rangle} + o(|h|)$ per $h \to 0$.

Norma di h

Teorema

Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora valgono le seguenti proprietà:

1) f è continua in x_0.

2) Esistono le derivate parziali di f in x_0 e sono le componenti del vettore $\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = \nabla f(x_0)$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad k = 1, \dots, n \quad e \quad \alpha = \nabla f(x_0)$

3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 e sono date da:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists \; \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \overset{\nabla f(x_0)}{\alpha} \cdot v = \nabla f(x_0) \cdot v$$

N.B. Non vale il viceversa, cioè può succedere che in x_0 esistano tutte le derivate parziali ma la funzione non sia continua in x_0.

$\exists$ derivate parziali $\not\Rightarrow$ differenziabilità

Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifichiamo che nel punto $(x_0, y_0) = (0,0)$ esistano derivate direzionali e sono nulle ma f non è continua

fisso $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\cancel{x_0} + t\alpha, \cancel{y_0} + t\beta) - \cancel{f(x_0, y_0)}}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{t^2\alpha^2 \cdot t\beta^2}{t^4\alpha^4 + t^2\beta^2} \right)^2 = \lim_{t \to 0} t \left(\frac{\alpha^2\beta}{t^2\alpha^2 + \beta^2} \right)^2$$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ ma f non é continua.

Basta muoversi lungo le parabole (t, t^2) ovvero $x = t$ e $y = t^2$ quindi:

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \frac{1}{4} \neq f(0,0) \text{ non é continua.}$$

<u>Dimostrazione</u>

Se f é differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \alpha \cdot v$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(|h|) \quad \text{per } h \to 0$$

Fissiamo $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$ prendo $h = t \cdot v$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{f(x_0) + \alpha \cdot (t \cdot v) + o(|tv|) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + t(\alpha \cdot v) + o(|tv|) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(\alpha \cdot v)}{\cancel{t}} + \frac{o(|t \cdot v|)}{t}$$

$$= (\alpha \cdot v) + \lim_{t \to 0} \frac{o(|t \cdot v|)}{t \cdot |v|} \cdot |v| \longrightarrow 0$$

$$= \alpha \cdot v + 0 = \alpha \cdot v \quad ✓$$

<u>Osservazione</u>

Le derivate parziali sono casi particolari di derivate direzionali, corrispondono alla scelta $v = e_k$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0)$$

La dimostrazione appena fatta ci dimostra anche l'esistenza delle derivate parziali e la formula

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) = \alpha \cdot \underbrace{e_k}_{} = \alpha_k$$

k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$

$\alpha_K \to$ K-esimo componente di α.
$\alpha \to$ vettore nella formula di differenziabilità di f con
$$\alpha_K = \frac{\partial f}{\partial x_K}(x_0) \quad = \alpha = \nabla f(x_0)$$

Se f è differenziabile in x_0, possiamo scrivere:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot h + o(|h|) \quad \text{per } h \to 0$$

Inoltre le derivate direzionali hanno la seguente formula:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0)\cdot v$$

Osservazione

Le formule valgono per qualsiasi direzione v.
Nel definire le derivate direzionali possiamo limitarci alle direzioni v con $|v|=1$ perché in questo modo descrivo tutte le possibili rette.

In quale direzione la derivata direzionale è massima o minima?

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0)\cdot v$$
$$= |\nabla f(x_0)|\cdot|v|\cdot \cos\theta$$
angolo compreso tra il gradiente di f e v.

$\max\limits_{v} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ = lo realizzo quando massimizzo $\cos\theta$

Ma il massimo del $\cos\theta = 1$ cioé quando $\theta = 0$.
L'angolo compreso tra ∇f e v é zero <=> scelgo come direzione quella del gradiante stesso, quando v é parallelo a ∇f

$$\max_{|v|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial(\nabla f(x_0))}(x_0)$$

Se voglio derivata direzionale massimo devo scegliere v come direzione del gradiente quindi v deve essere parallela a $\nabla f(x_0)$.

Per minimizzare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \rightarrow \cos\theta = -1$, $\theta = \pi$ cioé v parallela a $-\nabla f$

$\downarrow$

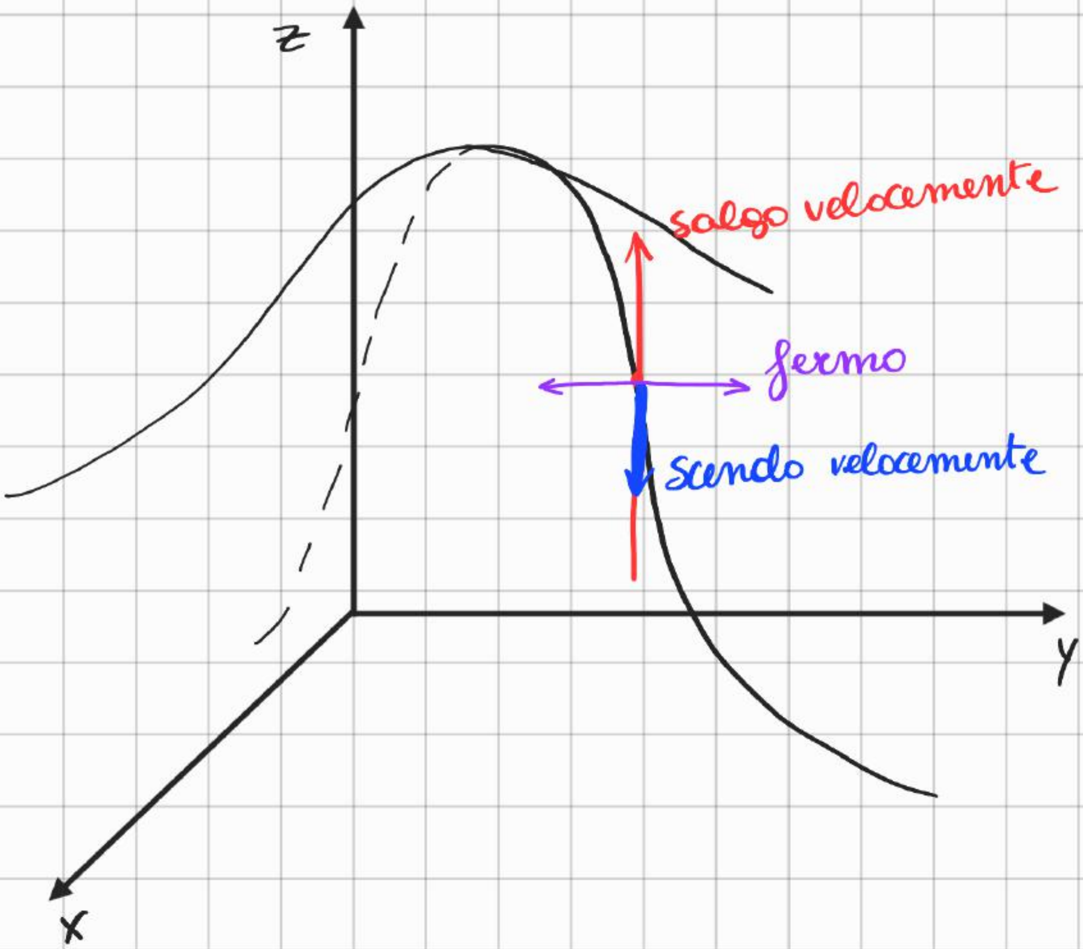
v dovrá avere direzione opposta a quella del gradiente di f.

Se $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ => $\cos\theta = 0$ allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

Se v é $\perp$ a $\nabla f(x_0)$ allora la derivata direzionale sará nulla.

Significato geometrico del gradiente

Il gradiente rappresenta la direzione di massima pendenza della funzione. Cioé la direzione in cui muoversi per salire piú in fretta possibile.


z
salgo velocemente
fermo
scendo velocemente
y
x

1) Come calcolo le derivate parziali?
2) Come dimostro che $f(x,y)$ é differenziabile in (x_0, y_0)?
3) Come calcolo le derivate direzionali?
4) Come calcolo il vettore α?

Teorema

f differenziabile in (x_0, y_0) $\Rightarrow$ f continua in (x_0, y_0)
$\Rightarrow$ $\exists$ derivate direzionali
$\Rightarrow$ $\exists$ derivate parziali

Risposte:

4) se f é differenziabile $\Rightarrow$ $\exists$ derivate parziali, quindi $\alpha = \nabla f(x_0, y_0)$.

Se so fare (1) e (2) allora α é il gradiente di f in (x_0, y_0) (vettore che ha come componenti le derivate parziali di f in (x_0, y_0).

3) Se so fare (1) e (2) allora le derivate direzionali nella direzione v ($v \in \mathbb{R}^2$) sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$$

Se (1) e (2) sono OK $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3) \ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v \\ 4) \ \alpha = \nabla f \end{cases}$

Attenzione: Se f non é differenziabile puó succedere che esistono comunque le derivate direzionali ma non saranno date da questa formula $\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$.

1) Calcolo delle derivate parziali:

Esempi

costante x   variabile x   costante y   variabile y

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x^2 + y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 2x$$

$$g(x) = x^2 \longrightarrow f(x,y) = g(x) + y^3$$

$$f_x(x,y) = g'(x) + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 3y^2$$

- $f(x,y) = x^2 \cdot y^3$

$$f_x(x,y) = y^3 \cdot (2x) = 2xy^3$$

$$f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$$

- $f(x,y) = \sin(xy^2) \qquad f_x = \cos(xy^2) \cdot y^2$

$$f_x(x,y) = \sin(x \cdot c) = f_x = (\sin(cx))' = \cos(cx) \cdot c$$

dove $c = y^2$

$f_y(x,y) = \sin(\tilde{c} \cdot y^2) = f_y = (\sin(\tilde{c}\, y^2))' = \cos(\tilde{c} \cdot y^2) \cdot \tilde{c} \cdot 2y$

dove $\tilde{c} = x$

$$f_y = 2xy \cdot \cos(xy^2)$$

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = x \cdot e^{yz^2} \longrightarrow$ 3 derivate parziali f_x, f_y, f_z

$f_x(x,y,z) = e^{yz^2}$

$f_y(x,y,z) = x \cdot e^{yz^2} \cdot z^2 = xz^2 \cdot e^{yz^2}$

$f_z(x,y,z) = x \cdot e^{yz^2} \cdot 2zy = 2xyz \cdot e^{yz^2}$

- $f(x,y) = e^{xy} \cos y$

$f_x(x,y) = \cos y \cdot e^{xy} \cdot y = y \cos(e^{xy})$

$f_y(x,y) = e^{xy} \cdot x \cdot \cos y + e^{xy}(-\sin y) = x \cos y\, e^{xy} - \sin(e^{xy})$

- $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^4)$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^4} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^4}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^4} \cdot 4y^3 = \frac{4y^3}{1 + x^2 + y^4}$$

- $f(x,y) = x^y$

$f_x(x,y) = y\, x^{y-1}$

$f_y(x,y) = x^y \cdot \log x$

Tratto y come una costante α
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Tratto $f(x,y) = a^y = e^{\log a^y} = e^{y \log a}$
$(e^{y\log a})' = e^{y\log a} \cdot \log a = a^y \cdot \log a$

ma $x = a$.

Interepretazione geometrica

Gradiente e insiemi di livello

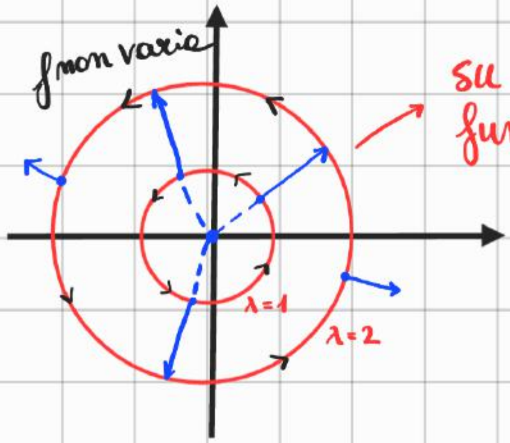
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideriamo $f(x,y) = x^2 + y^2$

Gli insiemi di livello (linee) definiti da:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$ sono circonferenze concentriche con centro nell'origine.

- Insiemi di livello
- Gradiente
- Direzione di f

$f(x,y) = x^2 + y^2$



su questi insiemi la funzione è costante

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x, 2y) = 2(x,y)$$

Geometricamente il gradiente si rappresenta come "campo di vettori". In ogni punto del dominio disegno un vettore (il gradiente) che mi sta indicando la direzione per salire con la massima pendenza.

Osservazione

Il gradiente é sempre perpendicolare agli insiemi di livello e punta verso i "λ crescenti (successivi)".

Esercizio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 - xy \quad$ $v = (1,3)$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2)$ $\quad (x_0, y_0) = (-1, 2)$

$$\nabla f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2\overset{x_0}{x} - \overset{y_0}{y}, -\overset{x_0}{x})$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \nabla f(\underset{x_0}{-1}, \underset{y_0}{2}) = (-2-2, -(-1)) = (-4, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2) = \nabla f(-1,2)\cdot v = (-4,1)\cdot(1,3) = -4+3 = -1 < 0$$

f sta scendendo

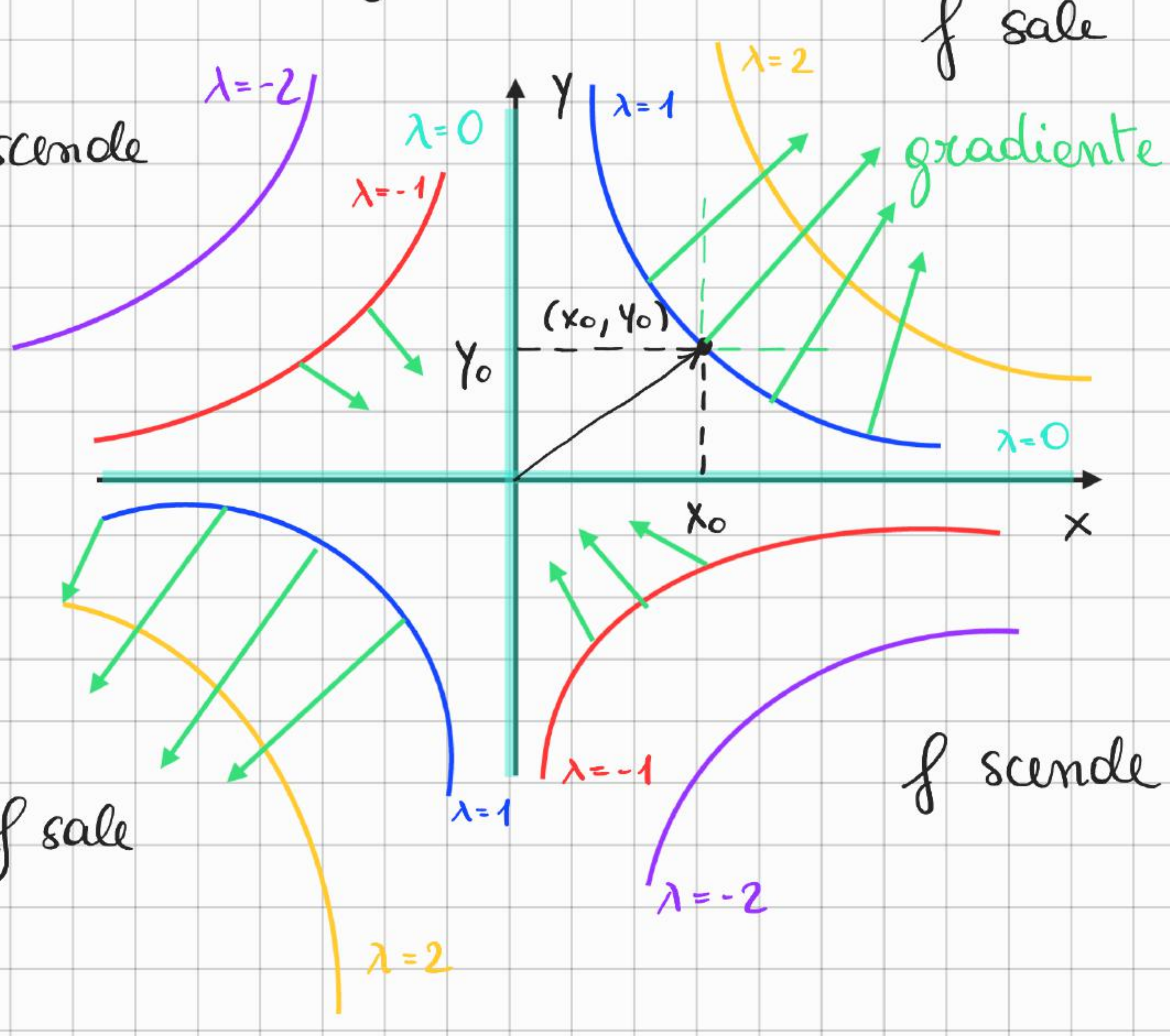
Esercizio

$f(x,y) = xy$ Disegnare ∇f

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y,x) \qquad \nabla f(0,0) = (0,0)$$

Insieme di livello λ

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy = \lambda\}$$



Domanda 2) Come posso dimostrare che $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0, y_0)?

Esistono 2 modi:

1) Usare la definizione (sconsigliato)
2) Usare un Teorema

Teorema (Differenziale Totale)

Se le derivate parziali di f esistono e sono continue, allora f è differenziabile.

A livello pratico: se non ci sono "problemi" nel calcolare le derivate parziali, la funzione è differenziabile.

Massimo e minimo nelle funzioni in più variabili

Teorema di Weierstrass

Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esistono sicuramente $\max\limits_{x\in[a,b]} f$ e $\min\limits_{x\in[a,b]} f$.

N.B.

- a, b sono inclusi nell'intervallo (Intervallo chiuso).
- f continua su $[a,b]$.
- max e min sono il massimo e il minimo valore assunto da f.

- I punti in cui la funzione assume il max o il min si dicono <u>punti di max / min</u>.

Dove cerchiamo i punti di max / min?

1) punti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$

→ punti <u>stazionari interni</u>

perché si annulla la derivata prima.

perché $x_0 \in (a,b)$ esclusi gli estremi.

2) punti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $\nexists\, f'(x_0)$

→ punti <u>singolari interni</u>

perché la derivata prima non esiste in quel punto.

perché $x_0 \in (a,b)$ esclusi gli estremi.

3) punti $x_0 = a$ e $x_0 = b$

→ punti di <u>bordo / frontiera</u> → perché sono gli estremi del mio intervallo.

Nell'analisi 1D:

- si trovano i punti (1), (2) o (3).
- si vanno a sostituire in f.
- si controlla dove f viene massimizzata.

Nell'analisi in più variabili:

- continuità ✓
- chiusura, limitatezza ✓

↳ $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se E^c è aperto.

Teorema

$E \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso $\iff$ E contiene tutto ∂E

"E si dice chiuso se contiene tutto il suo bordo".

"$E \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists\, \mathbb{R} > 0$ t.c. $E \subseteq B_{\mathbb{R}}(0)$"

Definizione

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è limitato e chiuso.

In $\mathbb{R}$, $[a,b]$ è un compatto di $\mathbb{R}$.

Teorema di Weierstrass (In più dimensioni)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e $f : A \to \mathbb{R}$ continua, allora esistono $\min\limits_{x \in A} f(x)$ e $\max\limits_{x \in A} f(x)$.

I punti di min/max vanno cercati nelle 3 seguenti categorie:
1) Punti stazionari interni (dove $\nabla f = 0$)
2) Punti singolari interni (dove f non è differenziabile)
3) Punti di bordo/frontiera (possono essere infiniti)

Teorema

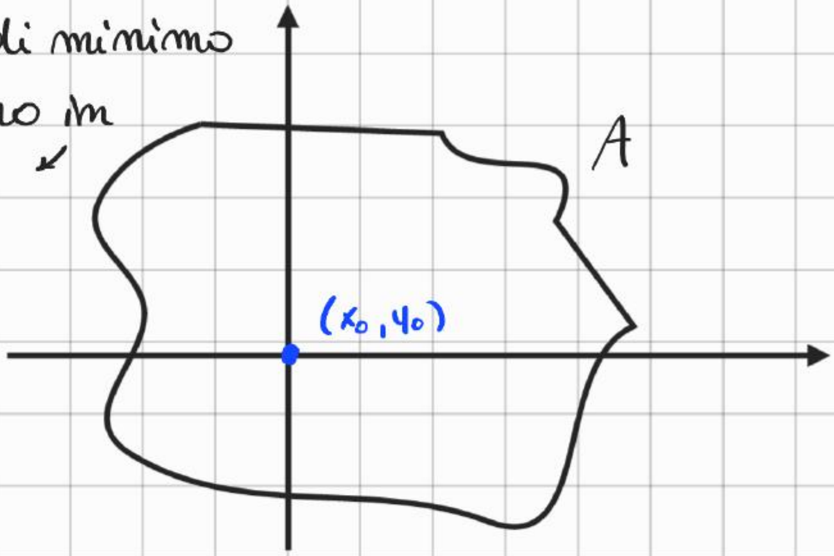
Se x_0 è un punto di max/min interno ad A, se $\exists$ le derivate parziali di f in x_0, allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Dimostrazione

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$

(x_0, y_0) sia punto di minimo

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono in (x_0, y_0)



Tesi: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \implies \nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Consideriamo la funzione $g(t) = f(x_0 + t, y_0)$

Poiché (x_0, y_0) è punto di minimo per f, $g(t)$ ha un minimo per $t = 0 \longrightarrow (x_0, y_0)$ per f.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ per $t = 0$ (poiché g ha min per $t = 0$)

Analogamente consideriamo $h(t) = f(x_0, y_0 + t)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ per $t = 0$ (poiché h ha min per $t = 0$)

Segue che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

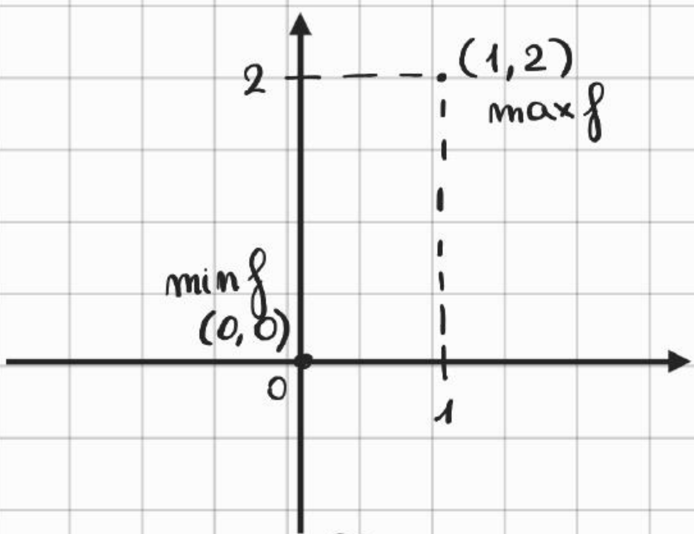
Se (x_0, y_0) fosse stato un punto di max, avrei avuto lo stesso risultato.
A livello pratico cerco i punti di min/max nei punti stazionari interni ($\nabla f(x_0, y_0) = 0$).

Come determinare min/max di f su un insieme compatto A.

1) Intuitivamente (per casi semplici)

$$\cdot \quad f(x,y) = 2x + 3y \qquad A = \underset{x \geq 0}{[0,1]} \times \underset{y \geq 0}{[0,2]} \subset \mathbb{R}^2$$

f continua su A compatto $\xRightarrow{W}$ $\exists \max f$, $\exists \min\limits_{x \in A} f$



Punto di max $\rightarrow$ punto in cui massimizzo sia x che y.

$(1,2) \longrightarrow \max\limits_{x \in A} f(x) = f(1,2) = 8$.

$\max\limits_{x \in A} f = 8$

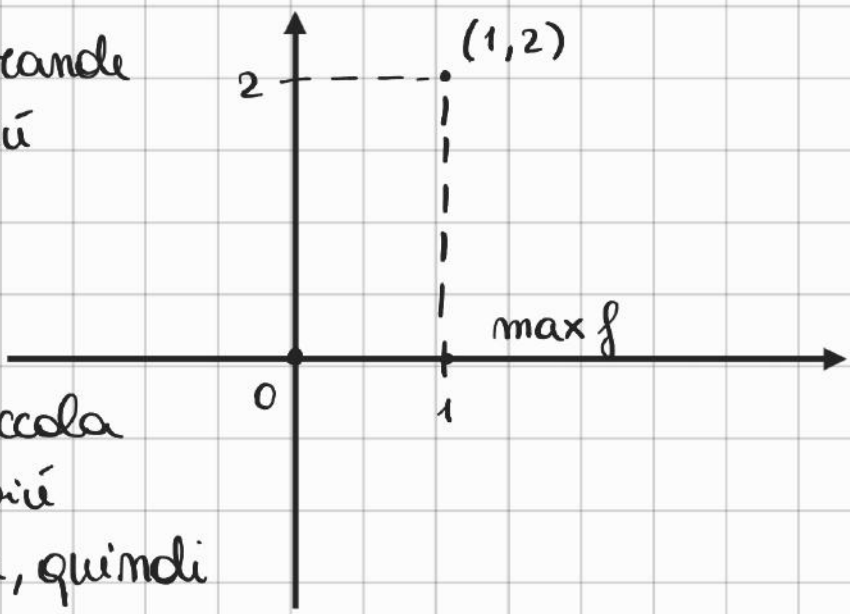
$\min\limits_{x \in A} f = 0$

Punto di min $\longrightarrow$ punto in cui minimizzo sia x che y.

$(0,0) \longrightarrow \min\limits_{x \in A} f(x) = f(0,0) = 0$.

• $f(x,y) = 2x - 3y \qquad A = [0,1] \times [0,2]$

max → cerco la x più grande
(1,0) possibile e la y più piccola, quindi $\max_{x \in A} f = 2$.



min → cerco la x più piccola
(0,2) possibile e la y più grande possibile, quindi $\min_{x \in A} f = -6$

$\nabla f = (2,-3) \neq 0$.

(1,0) e (0,2) sono punti di bordo.

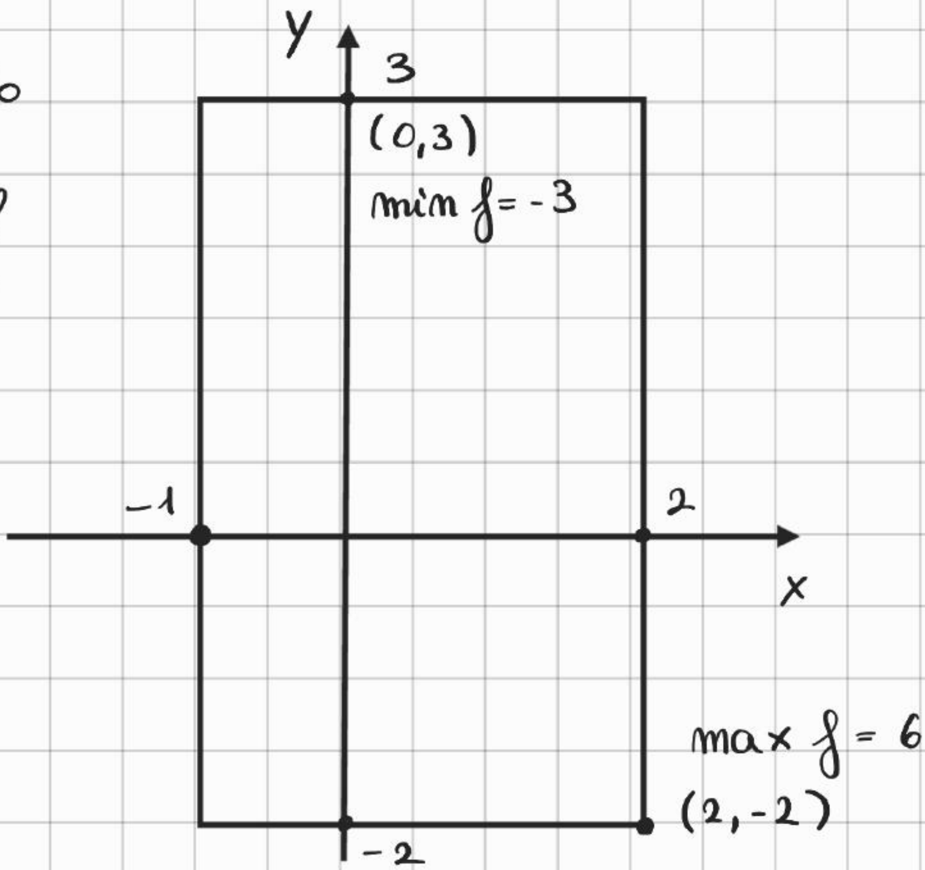
• $f(x,y) = x^2 - y \qquad A = [-1,2] \times [-2,3]$

f continua su A compatto

Weierstrass $\Rightarrow \exists \max f$, $\exists \min_{x \in A} f$

max → $f(2,-2) = 6$
(2,-2)

min → $f(0,3) = -3$
(0,3)



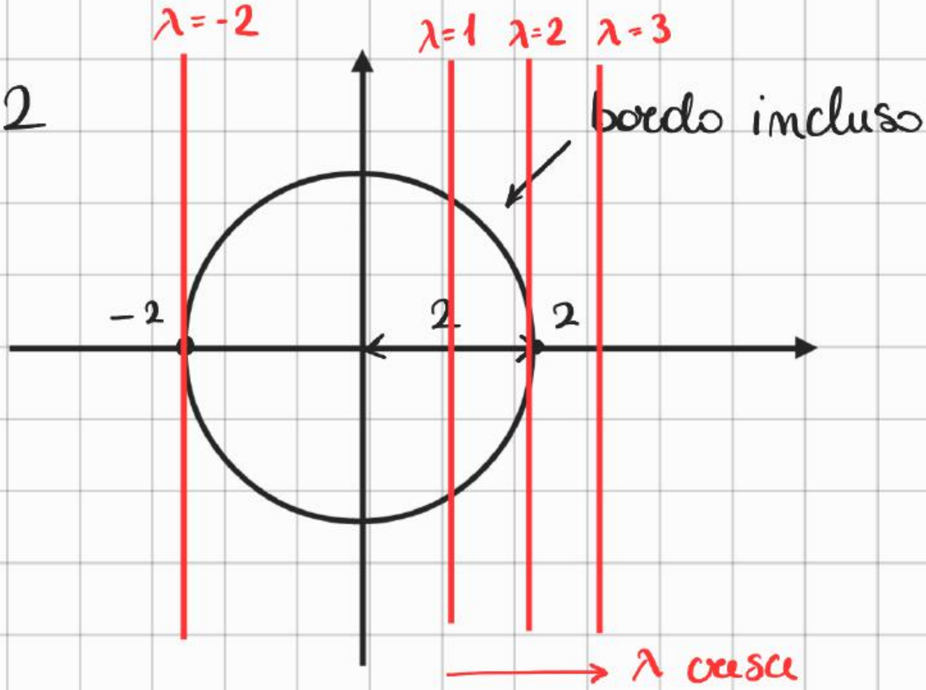
② Metodo delle linee di livello

• $f(x,y) = x$ $\qquad$ A = cerchio con centro l'origine e raggio 2.

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 4\}$$

$\max\limits_{x \in A} f = 2$

$\min\limits_{x \in A} f = -2$



Le linee di livello di $f(x,y)$ sono $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda\}$ $\longrightarrow$ le linee di livello sono rette parallele all'asse y.

max $f(x,y)$ in A é il piú grande λ t.c. $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset$

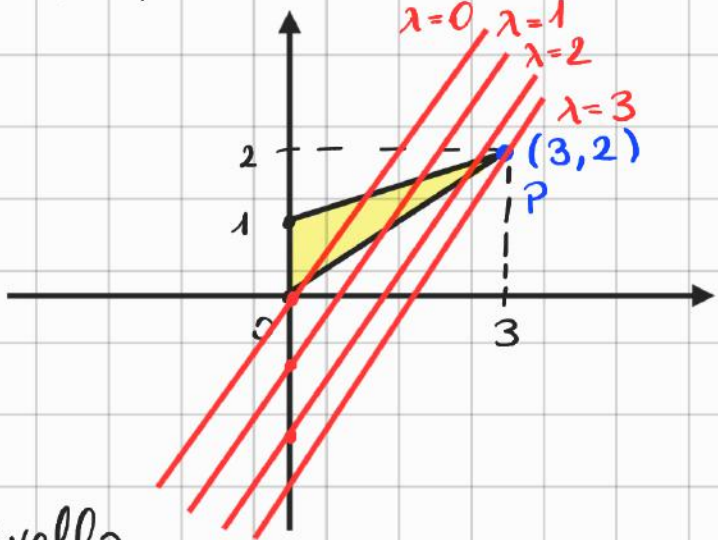
$$\lambda = 2 \rightarrow \max_{x \in A} f$$

min $f(x,y)$ in A é il piú piccolo λ t.c. $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset$

$$\lambda = -2 \rightarrow \min_{x \in A} f$$

Sintesi: cercare il più grande e il più piccolo λ per i quali l'insieme di livello λ interseca A.

- $f(x,y) = 2x - y$ A = triangolo con vertici nei punti $(0,0), (0,1), (3,2)$.



f continua su A compatto

per Weierstarss $\exists \max f$, $\exists \min f$, $x \in A$

Uso il metodo delle linee di livello

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = \lambda\}$$

$$y = 2x - \lambda$$

linea di livello

$\lambda = 2 \rightarrow y = 2x - 2$

$\lambda = 3 \rightarrow y = 2x - 3$ $P(3,2) \in$ linea di livello 3 ? NO!

$P = (\overset{x}{3}, \overset{y}{2}) \longrightarrow \underset{y=2}{2} \neq 2 \cdot \underset{x=3}{3} - 3 \rightarrow 2 \neq 3$ $P \notin$ linea 3

$\lambda = 4 \rightarrow y = 2x - 4$

Il λ più grande per cui l'insieme dato A interseca la linea di livello λ è per $\lambda = 4$.

$$\max_{x \in A} f = 4 \rightarrow P(3,2)$$

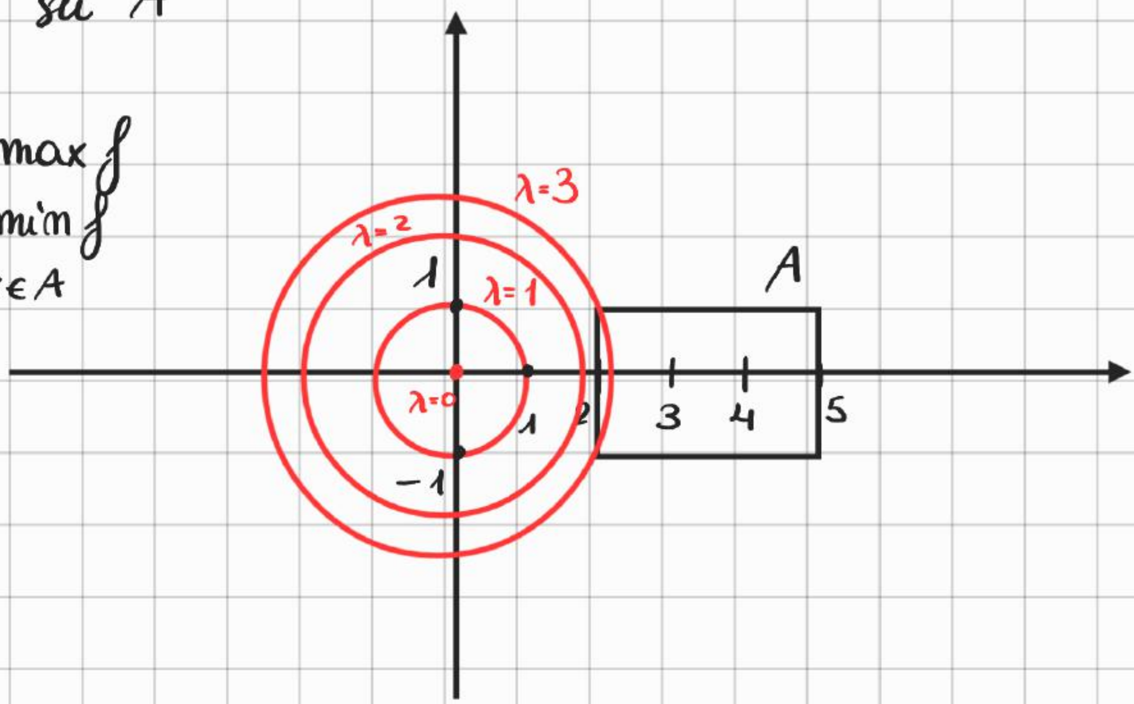
$\lambda = -1$ é il più piccolo λ t.c. $\lambda \cap A \neq \emptyset$ quindi $(0,1)$ é il min.

$$\min_{x \in A} f = -1 \quad P(0,1)$$

- $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad A = [2,5] \times [-1,1]$ compatto

f continua su A

per W $\exists \max f$
$\exists \min_{x \in A} f$



Le linee di livello λ = circonferenza con centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$

Il λ più piccolo t.c. $L_\lambda \cap A \neq \emptyset$ é $\lambda = 4 \rightarrow \min_{x \in A} f = 4$. $P(2,0)$

Il λ più grande t.c. $L_\lambda \cap A \neq \emptyset$ é $\lambda = 26 \rightarrow \max_{x \in A} f = 26$ $\begin{cases} P_1(5,1) \\ P_2(5,-1) \end{cases}$

③ Metodo classico $\qquad f(x,y) = x^2+y^2$

- Punti stazionari interni

$\nabla f(x_0,y_0)=0 \qquad (x_0,y_0)\in(2,5)\times(-1,1)$

$\nabla f=(2x,2y)$, $\nabla f=0 \iff (x,y)=(0,0)$ ma $(0,0)$ non é punto interno di A.

$\Rightarrow \nexists$ punti interni stazionari

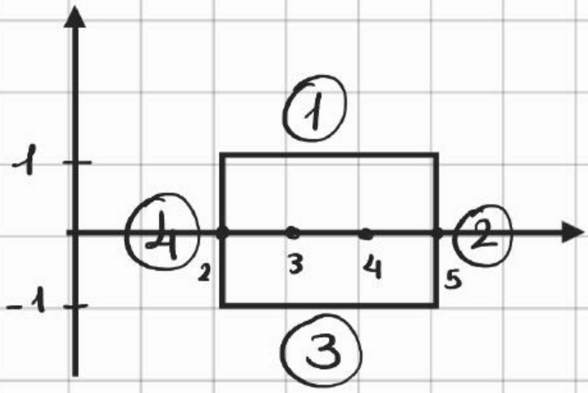
- Punti singolari interni

$f(x,y)=x^2+y^2$ é differenziabile su tutto A

$\hookrightarrow \emptyset$

- Punti di bordo

(metodo della parametrizzazione)



$① = \{(t,\underbrace{1}_{y=1}) : t\in[2,5]\} \qquad g_1(t)=f(t,1)=t^2+1$

$② = \{(\underbrace{5}_{x=5},t) : t\in[-1,1]\} \qquad g_2(t)=f(5,t)=t^2+25$

$③ = \{(t,\underbrace{-1}_{y=-1}) : t\in[2,5]\} \qquad g_3(t)=f(t,-1)=t^2+1$

④ $= \{(\underbrace{2}_{x=2},t) : t \in [-1,1]\}$ $\quad g_4(t) = f(2,t) = t^2+4$

Studio le 4 funzioni e ho max/min su ogni tratto, li confronto e prendo il più piccolo ottenendo il min e il max della funzione.

① min per $t=2$ $\quad$ max per $t=5$
② min per $t=0$ $\quad$ max per $t=\pm 1$
③ min per $t=2$ $\quad$ max per $t=5$
④ min per $t=0$ $\quad$ max per $t=\pm 1$

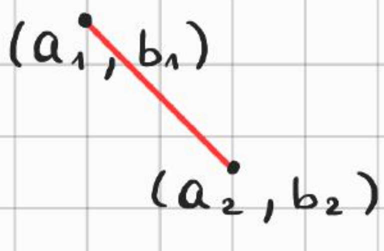
$\to (2,0) \to \boxed{\min_{x \in A} f = 4}$

$\to (5,1)$ e $(5,-1) \to \boxed{\max_{x \in A} f = 26}$

Come "parametrizzare" i bordi:

① Segmento di estremi (a_1,b_1) e (a_2,b_2)

$\underbrace{(x,y)}_{\in \mathbb{R}^2} = (a_1,b_1) + \underbrace{t}_{t \in [0,1]}(a_2-a_1, b_2-b_1)$



② Il tratto di un grafico $y=\varphi(x)$ con $x \in [a,b]$.

$(x,y) = (t, \varphi(t)) \quad t \in [a,b]$

③ Circonferenza con raggio r e centro in $(0,0)$.

$$(x,y) = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$\uparrow$ parametro

④ Circonferenza con centro (x_0, y_0) e raggio r

$$(x,y) = (x_0 + r \cos\theta,\ y_0 + r \cdot \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

⑤ Ellisse di equazione $ax^2 + by^2 = 1$ $\quad a, b > 0$.

$$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{b}} \sin\theta\right) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

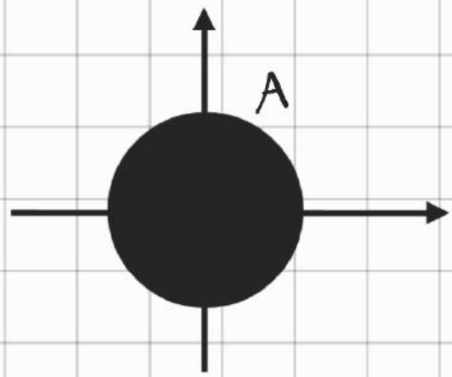
Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Data una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ allora, l'insieme:
$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0\}$ si dice luogo di zeri di φ
(linea di livello $\lambda = 0$).

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange serve per trovare possibili punti di max/min di una funzione f su un insieme A quando ∂A è il luogo di zeri di f.

Esempio

$f(x,y)$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$



Il bordo di A è la circonferenza data da $x^2 + y^2 = 3$
$\hookrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 3 = 0$
se definisco $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 3$
Il bordo di A è il luogo di zeri della funzione Φ

Analogamente se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 5\}$

ellisse

Il bordo di A è il luogo di zeri della funzione:

$$\Phi = 2x^2 + 3y - 5$$

Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^2$ e sia V il luogo di zeri di $\Phi(x,y)$. I candidati ad essere punti di min / max di f in V si cercano tra le seguenti due categorie:

1) Punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \implies (x,y) \in V \\ \nabla \Phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Se $\exists\ (x,y)$ che soddisfa il sistema allora tale punto è candidato ad essere punto di min / max.

$$f(x,y) = ?$$

$$(S_1) \iff \begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ tre equazioni per due incognite (x,y) quindi non sempre ho soluzioni.

2) Punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \Phi(x,y) \end{cases}$$ per un qualunque $\lambda \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

Il gradiente di f deve essere multiplo del gradiente di Φ.

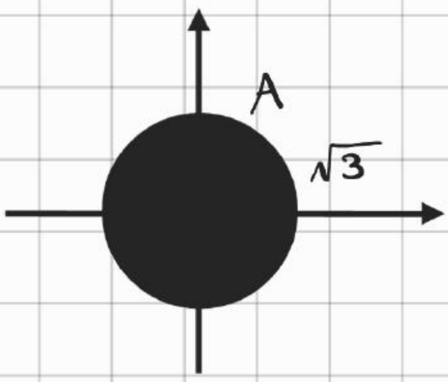
$$(S_2) \iff \begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \end{cases} \longrightarrow$$ 3 equazioni con 3 incognite, quindi di solito ha soluzioni.

Il punto (x,y) t.c. (S_2) é soddisfatto sará il candidato ad essere punto di min/max ed il numero λ si dice moltiplicatore di Lagrange ed é quel numero reale t.c. in quel punto (x,y), $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla \Phi(x,y)$.

Esempio

$f(x,y) = x-2y \qquad f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3\}$



Metodo classico:

f continua su A compatto

(Weierstrass: $\exists$ min/max)

↳ Punti stazionari interni (1)

↳ Punti singolari interni (2)

↳ Punti di bordo (3)

① $f(x,y) = x-2y \quad \nabla f(x,y) = (1,-2) \to$ costante e $\neq 0$ quindi $(1) = \emptyset$

② $\emptyset$

③ $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=3\}$ V è luogo di zeri di $\Phi = x^2+y^2-3$, se $(x,y) \in V$ $\Leftrightarrow \Phi(x,y)=0$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ \nabla\Phi(x,y)=0 \end{cases}$$

$\Phi(x,y) = x^2+y^2-3$

$\nabla\Phi(x,y) = (2x, 2y)$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ 2x=0 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} -3=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ impossibile $\to \nexists$ soluzioni

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla\Phi(x,y) \end{cases}$$

$\exists\ \lambda, x, y$ t.c.

$$\begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ 1 = \lambda(2x) \\ -2 = \lambda(2y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \end{cases}$$

?

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rule{3cm}{0.4pt} \\ \rule{3cm}{0.4pt} \\ 1 + 4 = 3 \cdot 4\lambda^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rule{3cm}{0.4pt} \\ \rule{3cm}{0.4pt} \\ 5 = 12\lambda^2 \end{cases}$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{12}$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3 \cdot 4}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$\exists$ 2 soluzioni del sistema (S_2) e i candidati di min/max sono:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \quad e \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$f(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{15} \longrightarrow \text{max}$$

$$f(P_2) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{15} \longrightarrow \text{min}$$

P_1 é max

P_2 é min

Osservazione

Nei punti di max/min le linee di livello e la linea di bordo (grafico di Φ) sono tangenti.
Il gradiente é perpendicolare alle linee di livello ma ∇f e $\nabla \Phi$ saranno paralleli.

Geometricamente

Sia V il bordo di A t.c. $f: A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R}^2)$.
Supponiamo che V sia il luogo di zeri di $\Phi(x,y)$, cioé V é linea di livello per Φ.

- Nei punti di max/min le linee di livello di f e la linea di livello $\lambda = 0$ di Φ sono tangenti.

"Le linee di livello sono tangenti a V nei punti di max/min

- ∇f é $\perp$ alle linee di livello di f.

$\nabla \Phi$ é $\perp$ alla linea di livello di Φ.

Segue che i due gradienti devono essere paralleli tra loro.

Quindi ∇f deve essere un multiplo del $\nabla \Phi$.

$$\nabla f = \lambda \nabla \Phi$$

Esempi in cui (S1) ha soluzione

1) $\Phi(x,y) = x^2 - y^3$ $\qquad$ V = luogo di zeri di Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x \qquad (S_1) = \begin{cases} x^2 - y^3 = 0 \\ 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -3y^2$$

$(x,y) = (0,0)$ é soluzione!

2) $\Phi(x,y) = x \cdot y$

$$(S_1) = \begin{cases} xy = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$(x,y) = (0,0)$ é soluzione

Teorema di Weierstrass generalizzato

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Supponiamo che:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$$

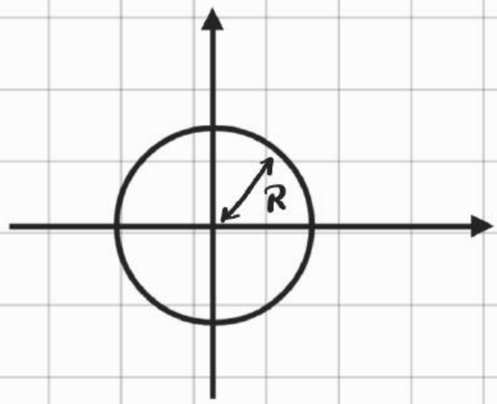
Allora esiste $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

Dimostrazione

$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty \implies \forall M, \exists R>0$ t.c. $f(x) \geq M$ $\forall x \in (B_R(0))^c$

Scelgo $M = f(0)+1 \implies \exists R>0$ t.c $f(x) \geq f(0)+1$ $\forall x \in (B_R(0))^c$

Considero $f: \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}$



$f: \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}}_{\overline{B_R(0)} \text{ é compatto}} \to \mathbb{R}$

Per Weierstrass classico $\exists \min_{x \in B_R(0)} f(x) = m$

Quindi dobbiamo dimostrare che m é minimo ma su tutto $\mathbb{R}^n$ e non solo su $\overline{B_R(0)}$.

Ci sono 2 casi:

- Se $|x| \leq R$ allora $f(x) \geq m = \min f$
- Se $|x| \geq R$ allora $f(x) \geq M = f(0)+1 \geq f(0) \geq m$

Perché 0 sta nella palla $|x| \leq R \implies f(x) \geq m$

Quindi $f(x) \geq m$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e per Weierstrass classico

$\exists\, x_0 \in B_R(0)$ t. c. $f(x_0) = m$.

Ho trovato il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$.

Analogamente:

<u>Teorema di Weierstrass generalizzato</u>

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to \infty}$$

Allora $\exists \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

<u>Derivate parziali su $\mathbb{R}^n$</u>

$$f(x,y) = x^2 + y^3 + x^4 - y^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4x^3 y^5 = g(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 5x^4 = h(x,y)$$

4 possibilità

g:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \to \frac{\partial \partial f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \to \frac{\partial \partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

h:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \to \frac{\partial \partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} \to \frac{\partial \partial f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Osservazione

In generale, per una funzione di n variabili ci sono n derivate parziali "prime" e n^2 derivate parziali "seconde".

Teorema (di inversione dell'ordine di derivazione)

Se f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sono continue nel punto (x_0, y_0) allora coincidono.

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Non conta l'ordine con cui derivo nel calcolare le derivate parziali successive.

Derivate parziali prime $\rightarrow$ $\nabla f = (f_x, f_y)$

Derivate parziali seconde $\rightarrow$ formano una Matrice

Matrice Hessiana

É la matrice formata dalle derivate seconde e si denota con Hf.

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{per } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Osservazione

Se le derivate parziali seconde esistono e sono continue, Hf é simmetrica

Studio locale nell'intorno di un pt. stazionario

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ($f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$) e sia $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ t.c.
$\nabla f(x_0,y_0)=0$ ($\Longleftrightarrow$ (x_0,y_0) pt. stazionario).

1) Se $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \longrightarrow$ derivate parziali seconde
Se $f_{xy}=f_{yx}$ Hf é simmetrica.

(+ +)
é definita positiva allora (x_0,y_0) é <u>pt di minimo locale</u>.

(Hf é definita positiva se tutti i suoi autovalori sono positivi)

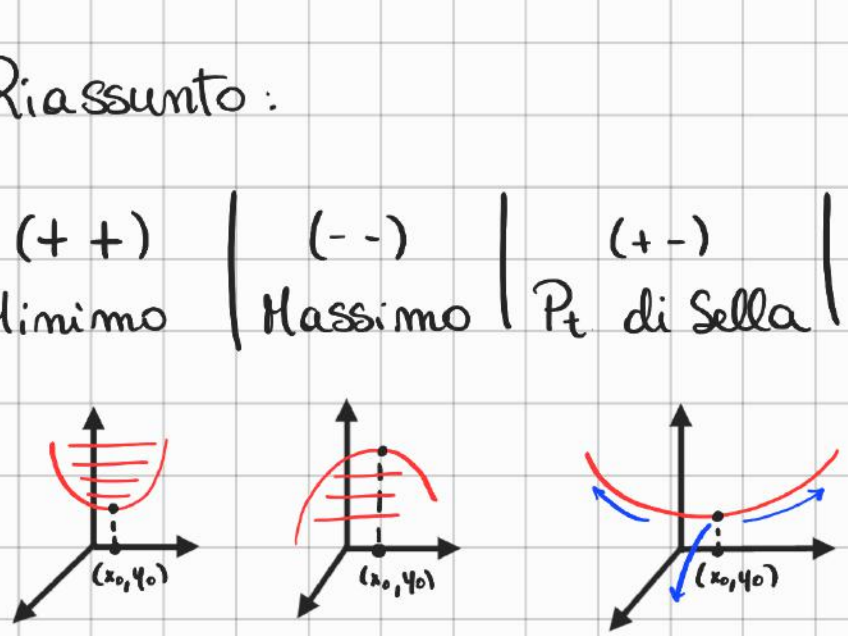
(− −)
2) Se Hf é definita negativa (entrambi gli autovalori sono strettamente negativi) allora (x_0,y_0) é <u>pt. di massimo</u> locale.

(+ −)
3) Se Hf é indefinita ($\exists$ due autovalori discordi) allora (x_0,y_0) é un <u>punto di sella</u> (né max né min locale).

4) Se Hf é degenere ($\det Hf=0$) allora non posso "dire" nulla.

Riassunto:

(+ +)	(− −)	(+ −)	($0\ \mp$)
Minimo	Massimo	Pt di Sella	?



Osservazione

La matrice Hessiana fornisce informazioni locali, cioè ci permette di concludere l'esistenza di max/min locali ma vicino al punto (x_0, y_0) **non** ci sono informazioni globali.

Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di minimo locale allora $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ e $Hf(x_0, y_0) \geq 0$ (semi-definitiva positivo)

Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di massimo locale allora $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ e $Hf(x_0, y_0) \leq 0$ (semi-definitiva negativo)

Riassumendo:

$\nabla f = 0$ e $Hf > 0 \implies$ minimo locale

minimo locale $\implies \nabla f = 0$ e $Hf \geq 0$

Esempio

1) $f(x,y) = x^2 + y^4 \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3)$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

$\Longrightarrow (0,0)$ é pt. stazionario.

Studiamo la matrice Hessiana:

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \downarrow +$ $\qquad$ $\lambda_2 = 0 \downarrow$ nullo

Quindi Hf é semi-definita positiva ($Hf \geq 0$) e $(0,0)$ non é pt. di max locale.
Se $(0,0)$ fosse pt. di max locale allora $Hf(0,0) \leq 0$.

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0$$

$f(0,0) = 0 \longrightarrow (0,0)$ é punto di minimo GLOBALE.

$f(x,y) > 0 = f(0,0)$ se $(x,y) \neq (0,0)$.

<u>Esempio</u>

$$f(x,y) = x^2 - y^4$$

$\nabla f(x,y) = (2x, -4y^3)$ $\qquad$ $(0,0)$ é pt. stazionario

$\nabla f(0,0) = 0$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 0$$

Hf é semidefinita positiva in $(0,0)$. Quindi $(0,0)$ non é max locale.
In questo caso $(0,0)$ non é né pt di max né pt. di min.

Vicino a $(0,0)$ $\exists$ punti in cui $f(x,y) > 0$ e punti in cui $f(x,y) < 0$.

<u>Esempio</u>

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^4$$

$$f_x = 3x^2 + 2xy^2$$

$$f_y = 2x^2y + 4y^3$$

$\nabla f = (f_x, f_y)$ e $\nabla f(0,0) = 0$ $\quad$ $(0,0)$ é pt. stazionario

$$Hf = \begin{pmatrix} 6x + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hf é degenere $\Rightarrow$?

Superficie cartesiana

$A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$, la superficie é il grafico di una funzione.

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}$$

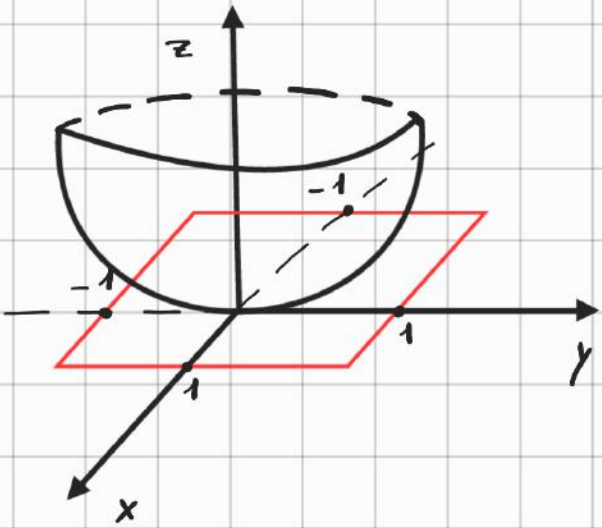
Esempio

$A = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

↓

Paraboloide



S é quella parte di paraboloide che si proietta sul quadrato A.

Superficie implicita

$S \subset \mathbb{R}^3$, S é il luogo di zeri di una funzione di tre variabili $\Phi(x,y,z)$.

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x,y,z) = 0 \}$$

Si diche $\Phi(x,y,z) = 0$ é l' equazione della superficie

Superficie implicita $\longrightarrow$ NON viene ricavata una variabile rispetto alle altre.

Superficie parametrica

$A \subseteq \mathbb{R}^2$, dove A è l'insieme dei parametri, consideriamo tre funzioni date:

$$x(u,v): A \to \mathbb{R}$$
$$y(u,v): A \to \mathbb{R}$$
$$z(u,v): A \to \mathbb{R}$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \text{ al variare di } (u,v) \in A\}$$

Esempio

Un piano in $\mathbb{R}^3$ ha eq. parametrica del tipo:

$$\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Punti per cui passa il piano}} + t\underbrace{(v_1, v_2, v_3)} + s\underbrace{(w_1, w_2, w_3)}$$

Punti per cui passa il piano

Vettori che generano il piano.

$$\begin{pmatrix} x_0 + t v_1 + s w_1 \\ y_0 + t v_2 + s w_2 \\ z_0 + t v_3 + s w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix}$$

Legame tra le diverse definizioni

Tutte le superfici cartesiane sono in realtá parametriche.

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}$ Cartesiana

$S = \{ (u,v, f(u,v) : (u,v) \in A \}$ Parametrica