Dipendenza e indipendenza lineare

n vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono linearmente indipendenti se $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Esempio

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Riduco la matrice A con le riduzioni di Gauss e se ottengo 3 pivot significa che v_1, v_2, v_3 sono L.I. dato che le soluzioni del sistema sarebbero solo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Se non ottengo 3 pivot provo a risolvere il sistema associato e ottengo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Un vettore $\vec{w}$ é combinazione lineare di n vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{w}$$

Esempio

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Riducendo la matrice A con $\vec{v}_4$ al posto dei termini noti otterremo un sistema semplificato, il quale, una volta risolto ci darà i $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.c.

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{w}$ e potremmo scrivere ove possibile i vettori come combinazione lineare di altri.

Determinante

Se A é una matrice 2×2 il $\det(A) = ad - bc$.
Se A é una matrice 3×3 o piú bisogna usare il seguente metodo:

Fissata la riga i: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

Fissata la colonna j: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

Matrice inversa

Una matrice si dice invertibile <=> $\det(A) \neq 0$.
Per calcolare l'inversa di una matrice A basta affiancarle la rispettiva matrice identitá e ridurla con le riduzioni di Gauss-Jordan fino ad ottenere a sinistra la matrice identitá.

$$A^{-1} = (A \mid I) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I \mid A^{-1})$$

Sistemi lineari

Un sistema di equazioni $Ax = b$ ammette soluzioni se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$ per il Teorema di Rouché - Capelli.

Basi

Per trovare una base di $\mathbb{R}^n$ ho necessariamente bisogno di n vettori linearmente indipendenti. Allo stesso modo, gli n vettori che formano una qualunque base sono i vettori colonna dei rispettivi pivot.

Esempio

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Una volta ridotta la matrice A con le riduzioni di Gauss, se otteniamo 3 pivot vuol dire che i tre vettori sono L.I. e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$.
Se, una volta ridotta la matrice non otteniamo 3 pivot ma per esempio 2 e corrispondono a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ diremo che $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ è una qualunque base $\subset \mathbb{R}^3$.

Applicazioni lineari

Un' applicazione lineare è una funzione $T: V \to W$ t.c.
$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$ e $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$.

Esempio

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Per verificare che T è un'A.L. bisogna controllare che le due proprietà siano verificate.
Possiamo prendere per esempio un vettore $T(e_1)$ rispetto al vettore canonico.

L'immagine di T è lo spazio generato dalle colonne di $A = M(T)$.

Esempio

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{pmatrix}$ $\quad$ $Im(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Per determinare l'immagine di T basta trovare tre vettori, per esempio rispetto alla base canonica, e applicargli T. Una volta ottenuti $T(e_1)$ e $T(e_2)$ basta metterli come vettori colonna in una matrice.

Il nucleo di un'A.L. è il sottospazio di V formato dai vettori la cui immagine è 0.

Esempio

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{pmatrix}$ $\quad$ $Ker(T) = \{x+y=0,\ 2x=0,\ x-y=0\}$

Per trovare il nucleo di T basta risolvere il sistema associato ad A.

$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad$ $Ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Matrice cambio di base

Esempio

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y-z \\ 2y+z \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \overset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{v}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{v}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}} \right\}$$

Il metodo più semplice per trovare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ è quello di trovare $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$ e $T(\vec{v}_3)$ per poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$T(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad T(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Una volta trovati questi tre vettori li affianchiamo alla matrice A, che ha per colonne i tre vettori iniziali $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, come termini noti.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right) \end{array}$$

Una volta ridotta la matrice A, passiamo al sistema associato e ne cerchiamo le soluzioni usando come termini noti prima la colonna c_1, poi la colonna c_2 e infine la colonna c_3.
Alla fine avremo ottenuto dai tre sistemi:

$$T(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} -17 \\ -30 \\ 14 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad T(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \\ -11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad T(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} -17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ 14 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

Prese invece due basi, per esempio $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e la base canonica C, la matrice $M_C^{\mathcal{B}}$ si ricava nel seguente modo:

$$M_C^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} & & & \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array}$$

$$M_C^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Riduco la matrice con Gauss.

Una volta ottenuta la matrice ridotta risolvo il sistema associato e ne cerchiamo le soluzioni usando come termini noti prima la colonna c_1 poi la colonna c_2 e infine la colonna c_3.
Alla fine avremo ottenuto dai tre sistemi:

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Quindi $M_C^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Autovalori, Autovettori, Autospazi

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Per trovare gli autovalori di A basta calcolare il $\det(A - \lambda I)$ e porlo $= 0$. Le occorrenze di ogni λ che avrà il polinomio caratteristico è la molteplicità algebrica

Per trovare un autovettore basta sostituire un λ ottenuto all'interno della matrice $A-\lambda I$, se necessario ridurla e infine risolvere il sistema associato.
L'Autospazio relativo al λ scelto contiene tutti gli autovettori ottenuti, la molteplicità geometrica del rispettivo λ è la dimensione del suo autospazio.

Per capire se A è diagonalizzabile $m_a = m_g \ \forall \lambda$ o $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ devono essere distinti, quindi $m_a = 1$.
La matrice D è la matrice diagonale che ha per diagonale gli autovalori e si ottiene con:

$$P^{-1} \cdot M \cdot P = D$$

Dove P è la matrice diagonalizzante che ha per colonne gli autovettori.

Spazi ortogonali e ortonormali

Esempio

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per determinare la proiezione ortogonale di $\vec{v}_1$ su $\vec{v}_2$ basta usare la formula $pr_{\vec{v}_2}(\vec{v}_1) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2} \cdot \vec{v}_2$

Per trovare una base ortonormale dobbiamo usare il Teorema di Gram-Schmidt. Per prima cosa bisogna porre $\vec{w}_1$ (vettore della base $\mathcal{B}'' = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ uguale a $\vec{v}_1$ e poi per ottenere $\vec{u}_1$ (vettore della base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$) basta fare $\frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$ per renderlo di norma 1.

Ripetiamo il seguente procedimento per $\vec{w_2}$ ecc... tenendo conto della seguente formula:

$$\vec{w_n} = \vec{v_n} - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{w_i}(v_n)$$

Quindi $\vec{w_2} = \vec{v_2} - pr_{\vec{w_1}}(\vec{v_2})$ e così via.