Algebra Lineare

Mario Di Modica, Matteo Acampora

2020/2021

Indice

Capitolo 1

Sistemi lineari e Riduzioni di Gauss

Risolvere un **sistema lineare** significa trovarne le soluzioni. Preso un generico sistema lineare $n \times n$ vuol dire trovare gli n numeri tali che tutte le equazioni del sistema risultano soddisfatte. Geometricamente rappresenta l'intersezione tra le rette del sistema nel piano $\mathbb{R}^n$. Indicheremo l'insieme delle soluzioni con:

$$S = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid eq_1 = b_1 \ , ..., \ eq_n = b_n\}$$

Definizione
Un sistema lineare si dice **omogeneo** se tutti i suoi termini noti sono uguali a *zero*, quindi $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

Preso un qualunque sistema di equazioni (nel nostro caso $n \times m$) possiamo procedere a risolverlo grazie ad un meccanismo chiamato "*Riduzione di Gauss*" o *riduzione a scalini*. Per farlo ci basta ricavare la matrice "associata" al nostro sistema (composta dai coefficenti delle incognite del sistema) e procedere con la riduzione.

$$\left\{\begin{array}{ccccl} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & ... & + & a_{2m}x_m & = b_2 \\ ... & + & ... & + & ... & = ... \\ a_{n1}x_1 & + & ... & + & a_{nm}x_m & = b_m \end{array}\right. \Longrightarrow \textit{Sistema lineare } n \times m$$

Per poter applicare la riduzione di Gauss bisogna utilizzare soltanto metodi che non alterano le soluzioni del sistema:

- Scambio di due equazioni
- Moltiplicare un equazione per uno scalare diverso da zero
- Sostituire un equazione con la somma termine a termine di quell'equazione con un'altra

Una variante della riduzione di Gauss è la *riduzione di Gauss-Jordan* che permette di ottenere gli zeri al di sopra dei *pivot* attrverso passaggi simili a quelli della riduzione di Gauss. Il principale motivo nell'utilizzo della riduzione di Gauss-Jordan è quello di ottenere a fine riduzione la matrice identitá che indicheremo con:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali, basi e rango

Definizione

Geometricamente, un **vettore** è un segmento orientato, cioè un segmento AB i cui estremi sono considerati in un certo ordine e che è caratterizzato da una direzione, un verso ed un modulo.

Definizione

Una **combinazione lineare** dei vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m$ è un qualunque vettore della forma $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1, ..., \lambda_m \vec{v}_m$.

Definizione

Lo **Span** dei vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m$ è l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari.

$$Span\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_m \vec{v}_m\}$$

Definizione

Uno **spazio vettoriale** è un insieme V, i cui elementi si dicono vettori, dotato di due operazioni: somma di due o piú vettori e prodotto di un vettore per uno scalare.

Definizione
Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice **sottospazio vettoriale** se:

- $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \implies \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{w} \in W \implies \lambda\vec{w} \in W$

Attenzione! Se W è un sottospazio vettoriale allora $\vec{0} \in W$, quindi se $\vec{0} \notin W$ allora si puó subito concludere che W non è un sottospazio vettoriale ma se $\vec{0} \in W$ non posso concludere che W è un sottospazio vettoriale dato che le due proprietá potrebbero non valere.
Teorema (Intersezione tra sottospazi)
Se W_1 e W_2 sono entrambi due sottospazi di V allora anche l'intersezione $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.
<u>Dimostrazione</u>

1. Se $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2$ e $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_1 \implies \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1$. Se $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2$ e $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_2 \implies \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_2$, quindi $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1 \cap W_2$.
2. Se $\vec{w} \in W_1 \cap W_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in W_1$ e $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\vec{w} \in W_1$. Se $\vec{w} \in W_1 \cap W_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in W_2$ e $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\vec{w} \in W_2$, quindi $\lambda\vec{w} \in W_1 \cap W_2$.

Definizione
Se W è un sottospazio, $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k\}$ si dice **insieme di generatori** di W se $\text{Span}\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k\} = W$, cioè se $\forall\vec{v} \in W \ \exists\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1\vec{w}_1 + ... + \lambda_k\vec{w}_k = \vec{v}$.
Teorema (Indipendenza Lineare)
Siano $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. Ogni vettore $\vec{v}_i$ non appartiene allo span degli altri
2. Se $\lambda_1 \vec{v}_1, ..., \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$ allora $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.
3. Il sistema omogeneo associato alla matrice $A = (\vec{v}_1|...|\vec{v}_k)$, ha soltanto $\vec{0}$ come soluzione.
4. A non ha colonne libere.

Definizione
L'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ si dice **base** del sottospazio W se:

- $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori.
- $\mathcal{B}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

I vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ che formano una base $\mathcal{B}$ sono i vettori colonna corrispondenti ai rispettivi *pivot* della matrice ridotta, e formano una base di $\mathbb{R}^n$ solo se sono linearmente indipendenti (ovvero se la matrice associata ridotta ha rango n).
Teorema
$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ è una base dello spazio vettoriale W se e solo se ogni vettore $\vec{w} \in W$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$.
Definizione
Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ è una base di W, le **coordinate** di un vettore $\vec{w} \in W$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono i coefficenti $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ tale che $\lambda_1 \vec{v}_1, ..., \lambda_k \vec{v}_k = \vec{w}$.
Definizione
La **dimensione** di un sottospazio di W è il numero di vettori di una sua qualunque base.

Teorema

Se prendo $k < n$ vettori in $\mathbb{R}^n$, questi non generano (cioè se k vettori generano $\mathbb{R}^n$, necessariamente $k \geq n$). Se prendo $k > n$ vettori in $\mathbb{R}^n$, questi non sono linearmente indipendenti (cioè se k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono L.I. allora necessariamente $k \leq n$). Quindi ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene esattamente n vettori.

Teorema (Grassman)

Siano V e W due sottospazi, allora:

$$dim(V + W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W)$$

Dimostrazione

Poniamo $dim(V \cap W) = k$ e prendiamo una base $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\} \in V \cap W$ con $V \cap W \subset V$. Sapendo che i vettori $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$ sono L.I., con il metodo del completamento di base posso aggiungere dei vettori fino ad ottenere una base di V. Sia quindi $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ una base di V e $dim(V) = k + n$, in modo analogo p[ossiamo completare una base di W ed ottenere la seguente $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ con $dim(W) = k+m$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ sia una base di $V + W$ e quindi $dim(V + W) = k + n + m$. Notiamo che una volta dimostrata questa proprietá, il teorema sará dimostrato. Infatti $dim(V+W) = dim(V)+dim(W)-dim(V\cap W) = (k+n)+(k+m)-k = k + n + m = dim(V + W)$.

Definizione

Per trovare le **soluzioni speciali** dobbiamo porre "a giro" una volta una variabile libera uguale ad uno e tutte le altre uguali a zero e cosí via.

Capitolo 3

Applicazioni lineari

Definizione
Una funzione $T : V \to W$ tra due spazi vettoriali si dice **applicazione lineare** se valgono le seguenti proprietá:

- $\forall \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \in V$ vale che $T(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = T(\overrightarrow{v}_1) + T(\overrightarrow{v}_2)$
- $\forall \overrightarrow{v} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ vale che $T(\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda T(\overrightarrow{v})$

N.B. Se T è un A.L. allora $T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.
Definizione
Il **rango** di una matrice A equivale al numero dei *pivot*.

$$rg(A) = \#pivot$$

Teorema (Rouchè-Capelli)
Un sistema di equazioni $A\overrightarrow{x} = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $(A \mid b)$:

$$rg(A) = rg(A \mid b)$$

Definizione
Il **nucleo** di un' A.L. $T : V \to W$ è il sottospazio:

$$ker(T) = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Quindi il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A, mentre $dim(ker(T)) = $ #variabili libere oppure $dim(ker(T)) = n - rg(A)$ (dove n è il numero delle incognite) .
Definizione
L'**Immagine** di una applicazione lineare $T : V \to W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ di V.

$$Im(T) = \{T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$$

Piú genericamente, utilizzando la matrice $A = M(T)$ (matrice associata a T), diremo che l'immagine di T è lo spazio generato dalle colonne di A e la $dim(Im(T)) = rg(A)$. Per verificare che un qualunque vettore $\vec{v} \in Im(T)$ basta verficare la seguente condizione:

$$rg(A) = rg(A \mid \vec{v})$$

Se $rg(A) \neq rg(A \mid \vec{v}) \Rightarrow v \notin Im(T)$.
Teorema (Nullitá piú rango)

$$dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = n = dim(V)$$

Un'A.L. si dice **iniettiva** se $dim(ker(T)) = 0$ cioè se $ker(T) = \{0\}$.
Un'A.L. si dice **suriettiva** se $dim(Im(T)) = dim(W)$ o $Im(T) = W$.
Un'A.L. si dice **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva, quindi anche <u>invertibile</u>.
Definizione
Se V è uno spazio vettoriale, un **endomorfismo** di V è un'applicazione lineare T da V in sé stesso $T : V \to V$.

Definizione

Un **isomorfismo** tra due spazi vettoriali V e W è un'applicazione lineare $T : V \to W$ *biunivoica.* $V \cong W$ (V e W sono isomorfi) $\Rightarrow$ $dim(V) = dim(W)$.

$T : V \to W$ applicazione lineare è un isomorfismo $\iff$ la matrice A associata a T è *invertibile.*

Proposizione

Se W è un sottospazio di V con $V \neq W$ allora $dim(W) < dim(V)$.

Teorema (Soluzioni particolari)

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare si puó caratterizzare nel seguente modo:

$$S = \{\vec{v} + \vec{x_p} \mid \vec{v} \in ker(T)\}$$

Dove $ker(T) = \text{Span}\{\text{soluzioni speciali}\}$ e $\vec{x_p}$ è una qualunque *soluzione particolare* del sistema.
Un metodo "facile" per ricavare le soluzioni particolari è quello di porre tutte le variabili libere uguali a zero e risolvere il sistema ridotto.

Prodotto matrice-vettore

Presa una matrice $A = (\vec{a}_1|...|\vec{a}_m)$ e il vettore $\vec{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ indicheremo il prodotto tra A e $\vec{x}$ con $A \cdot \vec{x} = x_1\vec{a}_1 + ... + x_m\vec{a}_m = T_A(\vec{x})$.

Matrice inversa

Per determinare l'inversa di una matrice il metodo piú semplice è quello di affiancare alla matrice A, che vogliamo invertire, la matrice identitá e ridurla con la riduzione di Gauss-Jordan fino ad ottenere a sinistra la matrice identitá e a destra la matrice inversa che indicheremo con A^{-1}.

$$A^{-1} = (A \mid I)$$

Determinante

Se la matrice, della quale vogliamo calcolare il determinante, è una 2×2 basta moltiplicare i numeri della prima diagonale per poi sottrargli il prodotto della seconda diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow det(A) = ad - bc$$

Se la matrice è una 3×3 o piú bisogna attuare un procedimento leggermente piú macchinoso ma allo stesso tempo semplice. Per prima cosa bisogna trovare (se c'è) la riga o la colonna con piú zeri, in quanto ció ridurrrebbe di molto la complessitá dei calcoli, se la nostra matrice non contiene zeri scegliamo arbitrariamente una riga o una colonna da tenere "fissata" e moltiplichiamo ogni numero di quella riga o colonna per il determinante della sottomatrice di A senza considere la riga e la colonna nella quale si trova il numero che stiamo moltiplicando. L'unica cosa da tenere in considerazione quando svogliamo questi calcoli è la posizione i, j del numero che stiamo moltiplicando, se il numero è in una posizione i, j t.c. $i+j = n$ pari allora basterá lasciare il numero con il suo segno di partenza, se il numero è in una posizione i, j t.c. $i + j = n$ dispari dovremo moltiplicarlo per -1.

Definizione

Formalmente indicheremo il **determinante** di una matrice $A = (a_{ij})$ (matrice quadrata $n \times n$) nel seguente modo:

$$\text{Fissata la riga i: } det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

$$\text{Fissata la colonna j: } det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

La proprietá piú importante del determinante è la seguente:

$$\text{A è invertibile} \Longleftrightarrow det(A) \neq 0$$

Teorema (Binet)

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Ad esempio se A fosse invertibile avremmo che $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$, infatti $1 = det(I) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1})$

Capitolo 4

Autovalori, autovettori e autospazi

Definizione
Un **autovalore** di A è un numero λ per cui esiste un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.
Definizione
Un **autovettore** relativo a un autovalore λ è un vettore $\vec{v}$ (e sicuramente ne esistono non nulli) tale che $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = 0$, quindi $\vec{v}$ è soluzione del sistema omogeneo associato a $(A - \lambda I)$.
Definizione
L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore λ formano uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{R}^n$), detto **autospazio** relativo all'autovalore λ:

$$Aut(\lambda) = \{\text{autovettori relativi a } \lambda\}$$

Definizione
Il **polinomio caratteristico** di A è il polinomio:

$$p_M(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

La **molteplicitá algebrica** (m_a) indica la molteplicitá di ogni λ che azzera il polinomio caratteristico e si ricava ponendo $p_M(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$.
La **molteplicitá geometrica** (m_g) invece rappresenta la dimensione dell'autospazio relativo al λ che abbiamo preso in considerazione o $m_g = n - rg(A)$.
Per quanto riguarda la dimensione di $Aut(\lambda)$ abbiamo che:

$$1 \leq dim(Aut(\lambda)) \leq m_a$$

Definizione

Una matrice A $n \times n$ si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice *diagonale* D, ovvero esiste una matrice P, detta **matrice diagonalizzante**, tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ è una matrice diagonale.
La matrice diagonalizzante P ha per colonne gli autovettori linearmente indipendenti di A.
Condizione necessaria affinchè una matrice sia diagonalizzabile è che la molteplicitá algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidano.
Una matrice A, $n \times n$, è diagonalizzabile se la somma delle molteplicitá geometriche dei suoi autovalori è n, ovvero se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è n, ovvero se ha n autovettori linearmente indipendenti. Se A ha n autovalori distinti allora è sicuramente diagonalizzabile (infatti ha sicuramente n autospazi di dimensione 1). La matrice diagonale ha nella diagonale principale gli autovalori relativi ad A.

Capitolo 5

Spazi, basi e complementi ortogonali

Definizione
Preso un vettore $\vec{v} \neq 0$ indichiamo con $V^{\perp} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{w} \perp \vec{v} = 0\}$ lo **spazio ortogonale** al vettore $\vec{v}$ che è un sottospazio vettoriale.
Definizione
La **norma** o *lunghezza* del vettore $\vec{v}$ è il numero:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{< \vec{v} \cdot \vec{v} >}$$

Segue che $< \vec{v} \cdot \vec{v} >= ||\vec{v}||^2$.
Definizione
Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e indicato con θ l'angolo convesso tra essi, si ha:

$$\cos(\theta) = \frac{< \vec{u} \cdot \vec{v} >}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Definizione
La **distanza** tra un vettore $\vec{v}$ e un vettore $\vec{u}$ si indica con:

$$d(u, v) = ||u - v||$$

Definizione
Dati due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in V$ si chiama **proiezione ortogonale** di u su v il vettore:

$$pr_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{< \vec{u} \cdot \vec{v} >}{||\vec{v}||^2} \cdot v$$

- $pr_{\vec{v}}(\vec{u})$ è un vettore parallelo a $\vec{v}$.
- $\vec{u} - pr_{\vec{v}}(\vec{u})$ è un vettore ortogonale a $\vec{v}$.
- $\vec{u} = (\vec{u} - pr_{\vec{v}}(\vec{u})) + pr_{\vec{v}}(\vec{u})$, ovvero ogni vettore u puó sempre essere scritto come somma di un vettore ortogonale e di uno parallelo ad un altro vettore $\vec{v}$.

Definizione

Una **base ortogonale** è una base in cui i vettori sono ortogonali a due a due.

Definizione

Una **base ortonormale** è una base ortogonale dove tutti i vettori hanno norma 1.

Definizione

Una matrice A tale che $A^{-1} = A^t$ si dice **matrice ortogonale** e corrisponde alla matrice cambio di base rispetto ad una base ortonormale. Notiamo che $det(A) = \pm 1$, e A è detta *ortogonale speciale* se $det(A) = 1$.

Definizione

Un **sistema ortonormale** è un insieme $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ di vettori a due a due ortogonali (o perpendicolari) e di norma 1.

Definizione

Presa una matrice A ottenuta rispetto alla *base canonica* e una base $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ allora la matrice scritta rispetto alla base $\mathcal{B}$ sará $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ dove $S = (\vec{v_1}|...|\vec{v_k})$ è la **matrice cambio di base**.

Definizione

Due matrici A e B si dicono **simili** se corrispondono alla stessa applicazione lineare rispetto ad opportune basi. Equivalentemente A e B si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile S ("cambio di base") tale che:

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

Se A e B sono **simili** allora hanno gli stessi polinomi caratteristici.

Definizione

Una **matrice trasposta** è una matrice che per colonne le righe di A e per righe le colonne di A e si indica con A^t.

Definizione
Presa A^t come matrice trasposta di A, una matrice A è **simmetrica** quando:

$$A^t = A$$

Definizione
Un endomorfismo $T : V \to V$ si dice **simmetrico** se:

$$(T(\vec{u}), \vec{v}) = (\vec{u}, T(\vec{v}))$$

Se T è un endomorfismo e A è la matrice associata a T rispetto a una base ortonormale, allora:

- T è simmetrico $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica (cioè $A = A^t$).
- T ha n autovalori reali (contati con la loro molteplicitá).
- Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Teorema (Gram-Schmidt)
Il teorema di Gram-Schmidt ci permette di ricavare una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\vec{u_1}, ..., \vec{u_n}\}$ a partire da una base qualsiasi $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ nel seguente modo.
Determiniamo innanzitutto a partire dalla base $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$ la base $\mathcal{B}'' = \{\vec{w_1}, ..., \vec{w_n}\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1). Notiamo che siccome dei vettori w_i ci interessa solo l'ortogonaliá, possiamo sostituire un vettore w_i ottenuto con un qualsiasi suo multiplo. In particolare per ottenere la base $\mathcal{B}'$ cercata è sufficiente rendere i vettori w_i di norma 1, dividendoli per la loro norma.

- $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$
- $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - pr_{\vec{w}_1}(\vec{v_2})$

- $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - pr_{\vec{w}_1}(\vec{v_3}) - pr_{\vec{w}_2}(\vec{v_3})$
- ...
- $\vec{w}_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{\vec{w}_i}(\vec{v_n}) = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< \vec{v}_n \cdot \vec{w}_i >}{< \vec{w}_i \cdot \vec{w}_i >} \cdot \vec{w}_i$

Quindi

$$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||}, \qquad u_2 = \frac{w_2}{||w_2||}, \qquad ..., \qquad u_n = \frac{w_n}{||w_n||}$$

Teorema (Spettrale)

- Se T è un endomorfismo simmetrico di V, allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T. In particolare T è diagonalizzabile, cioè esiste una base (ortonormale) di V rispetto alla quale la matrice associata a T è diagonale.
- Se A è una matrice simmetrica, allora A è simile ad una matrice diagonale D (ovvero A è diagonalizzabile). Inoltre la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P = D$$