Teorema di Rice

Sia $\mathcal{A}$ un insieme di funzioni calcolabili, e $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ l'insieme delle macchine che le calcolano (i.i.r.f.). Allora:

$$A \in \mathcal{R} \iff \mathcal{A} = \varnothing \vee \mathcal{A} = \{\varphi_x \mid x \in \mathbb{N}\}\,.$$

Questo significa che non possiamo costruire una funzione calcolabile totale che determina se una qualsiasi macchina in input possiede o no una data proprietà non banale.

Dimostrazione

A è i.i.r.f., quindi se $\varnothing \neq A \neq \mathbb{N}$ allora $K \leq A \vee K \leq \overline{A}$, quindi almeno uno tra A e $\overline{A}$ non è ricorsivo, dunque non lo sono entrambi.

Se invece $\mathcal{A} \in \{\varnothing, \mathbb{N}\}$, si osserva banalmente che $A \in \mathcal{R}$.