Classificazione di classi con riduzioni

Date le classi $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ di problemi con $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$, una relazione di riduzione $\leq_\mathcal{F}$ classifica $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{E}$ se e solo se, $\forall A, B, C$:

riflessività $A \leq_\mathcal{F} A$, ovvero $id \in \mathcal{F}$;

transitività $A \leq_\mathcal{F} B \wedge B \leq_\mathcal{F} C \implies A \leq_\mathcal{F} C$,
ovvero $\forall f, g \in \mathcal{F} \,.\, f \circ g \in \mathcal{F}$;

$\mathcal{D}$ ideale $A \leq_\mathcal{F} B \wedge B \in \mathcal{D} \implies A \in \mathcal{D}$,
ovvero $\forall f \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{D} \,.\, \{x \mid f(x) \in B\} = A \in \mathcal{D}$;

$\mathcal{E}$ ideale $A \leq_\mathcal{F} B \wedge B \in \mathcal{E} \implies A \in \mathcal{E}$
ovvero $\forall f \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{E} \,.\, \{x \mid f(x) \in B\} = A \in \mathcal{E}$;

Le ultime due proprietà dicono che le classi sono chiuse in basso per riduzione: se un problema si riduce a un problema in una classe allora appartiene a quella classe.

$\leq_F$ è un pre-ordine parziale.

Classificazione con funzioni ricorsive

$\leq_{\text{rec}}$ ($\text{rec} = \{\varphi_i \mid \text{dom}\, \varphi_i = \mathbb{N}\}$) classifica $\mathcal{R}$ e $\mathcal{RE}$:

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{RE}$;

riflessività $id \in \text{rec}$;

transitività la composizione preserva la totalità;

$\mathcal{R}$ ideale $\forall B \in \mathcal{R} \,.\, \{x \mid f(x) \in B\}$ ha funzione caratteristica $\chi_B \circ f$, che è ricorsiva perché lo sono χ_B e f;

$\mathcal{RE}$ ideale come per $\mathcal{R}$.