HAM $\leq$ SAT

Cerchiamo $f \in \textsc{LogSpace}$ tale che $\forall G\ .\ G$ ha un cammino Hamiltoniano se e solo se $\exists \mathcal{V}\ .\ \mathcal{V} \models f(G)$.

Un cammino Hamiltoniano è una permutazione π dei nodi tale che

$$\pi(j) = i \wedge \pi(k) = i + 1 \implies (j, k) \in A.$$

π è una funzione biunivoca, e può essere rappresentata come formula booleana. Diciamo che $x_{i,j}$ è vera $\iff \pi(j) = i$ (n^2 variabili, dove $n = |N|$), e imponiamo vincoli di:

univalenza $\bigwedge_{j, i \neq i'} \neg(x_{i,j} \wedge x_{i',j})$, in FNC $(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i',j})$

totalità $\bigwedge_{j} (x_{1,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$

iniettività $\bigwedge_{i, j \neq j'} \neg(x_{i,j} \wedge x_{i,j'})$, in FNC $(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,j'})$

surgettività $\bigwedge_{i} (x_{i,1} \vee \cdots \vee x_{i,n})$

cammino $\bigwedge_{i, (j,j') \notin A} \neg(x_{i,j} \wedge x_{i+i,j'})$, in FNC $(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i+i,j'})$

Quindi:

- se $\mathcal{V} \models f(G)$, $\forall j\ .\ \exists! i\ .\ \mathcal{V}(x_{i,j})$, perciò $\pi(j) = i$ è un cammino Hamiltoniano di G;
- viceversa, se π è un cammino Hamiltoniano di G allora $\mathcal{V} \models f(G)$ con

$$\mathcal{V}(x_{i,j}) = \begin{cases} \mathrm{t} & \pi(j) = i \\ \mathrm{f} & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Inoltre $f \in \textsc{LogSpace}$. Infatti può essere calcolata da una macchina M in questo modo:

1. M scrive n (in binario) sul primo nastro di lavoro — $\lceil \log n \rceil$ celle, e
2. scrive sul nastro di output i congiunti relativi ai vincoli, mantenendo i contatori su altri tre nastri di lavoro — $3\lceil \log n \rceil$ celle,

per un totale di $4\lceil \log n \rceil$ celle.