Problemi ardui e completi

Se $\leq_\mathcal{F}$ classifica $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{E}$, $\forall A, B, H$ diciamo che:

- $A \equiv_\mathcal{F} B$ se $A \leq_\mathcal{F} B \wedge B \leq_\mathcal{F} A$
  - non vale che $A = B$ perché $\leq_\mathcal{F}$ non è necessariamente antisimmetrica;
  - $\{B \mid A \equiv_\mathcal{F} B\}$ è detto *grado* di A;
- H è $\leq_\mathcal{F}$-arduo per $\mathcal{E}$ se $\forall A \in \mathcal{E} \;.\; A \leq_\mathcal{F} H$ — è possibile che $H \in \overline{\mathcal{E}}$;
- H è $\leq_\mathcal{F}$-completo per $\mathcal{E}$ se è $\leq_\mathcal{F}$-arduo per $\mathcal{E}$ e $H \in \mathcal{E}$.

  H riassume la "difficoltà" dell'intera classe $\mathcal{E}$.

Con $\mathcal{E}$-arduo/completo si intende arduo/completo per $\mathcal{E}$ rispetto a una classe di riduzioni fissata.

Proprietà

- se $\leq_\mathcal{F}$ classifica $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{E}$ e C è $\leq_\mathcal{F}$-completo per $\mathcal{E}$, allora $C \in \mathcal{D} \iff \mathcal{D} = \mathcal{E}$:

  $\implies$ $\forall A \in \mathcal{E} \;.\; A \leq_\mathcal{F} C$ (completezza) e $A \in \mathcal{D}$ ($C \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ ideale), quindi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ e per antisimmetria di $\subseteq$ segue la tesi.

  $\Leftarrow$ ovvio.

- se A è $\mathcal{E}$-completo, $A \leq_\mathcal{F} B$ e $B \in \mathcal{E}$, allora B è $\mathcal{E}$-completo:

  $\forall D \in \mathcal{E} \;.\; D \leq_\mathcal{F} A$ (completezza), quindi $D \leq_\mathcal{F} B$ (transitività), ovvero B è $\mathcal{E}$-arduo, e visto che $B \in \mathcal{E}$, è anche completo.