$\mathcal{RE}$-completezza di K

Dimostriamo che

$$\forall A \in \mathcal{RE} \; . \; A \leq_{\text{rec}} K = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\} \in \mathcal{RE}.$$

Sia $\psi(x)$ la funzione calcolabile tale che $A = \text{dom}(\psi)$, e definiamo $\psi'(x, y) = \psi(x)$. Allora:

$$\psi'(x, y) \overset{\text{C-T}}{=} \varphi_i(x, y) \overset{s_1^1}{=} \varphi_{s(i,x)}(y) \overset{f(x)=s(i,x)}{=} \varphi_{f(x)}(y).$$

Quindi:

$$A = \{x \mid \psi(x) \downarrow\} = \left\{x \mid \varphi_{f(x)}(y) \downarrow\right\}.$$

Ponendo $y = f(x)$,

$$A = \left\{x \mid \varphi_{f(x)}(f(x)) \downarrow\right\} = \{x \mid f(x) \in K\},$$

ovvero $x \in A \iff f(x) \in K$, e visto che $f \in \text{rec}$, $A \leq_{\text{rec}} K$.