Funzioni ricorsive primitive

Minima classe $\mathcal{C}$ di funzioni $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ che comprende i seguenti *schemi primitivi di base*:

I zero $\lambda x_1, \ldots, x_k.0$

II successore $\lambda x.x + 1$

III identità/proiezione $\lambda x_1, \ldots, x_k.x_i$ per $i = 1, \ldots, k$

ed è chiusa per:

IV composizione se $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}$ sono funzioni in m variabili e $h \in \mathcal{C}$ in k, allora la composizione

$$\lambda x_1, \ldots, x_m.h(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_m))$$

è contenuta in $\mathcal{C}$;

V ricorsione primitiva se $h \in \mathcal{C}$ è una funzione in $k + 1$ variabili e $g \in \mathcal{C}$ in $k - 1$, allora la funzione in k variabili

$$\begin{cases} f(0, x_2, \ldots, x_k) = g(x_2, \ldots, x_k) \\ f(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_k) = h(x_1, f(x_1, \ldots, x_k), x_2, \ldots, x_k) \end{cases}$$

è contenuta in $\mathcal{C}$.

Quindi f è ricorsiva primitiva se e solo se esiste una successione finita (derivazione) di funzioni $f_1, \ldots, f_n = f$ tale che $\forall i \in 1, \ldots, n$, f_i è definita secondo gli schemi di base oppure si può ottenere tramite l'applicazione di IV o V da funzioni f_j con $j < i$.

Intuizione per V

- g è il caso base;
- il primo parametro di f è usato come "contatore" per la ricorsione (quante chiamate ricorsive rimangono da fare);
- h determina il valore calcolato nel caso ricorsivo, in base al contatore, al risultato della chiamata ricorsiva e agli altri parametri di f.

Esempio:

$$\begin{aligned} g &= \lambda x.x + 1 & f(0, x_2) &= g(x_2) \\ h &= \lambda x_1, x_2, x_3.g(x_2) & f(x_1 + 1, x_2) &= h(x_1, f(x_1, x_2), x_2) \end{aligned}$$

f calcola $x_1 + x_2$.

Espressività

Tutte le FRP sono totali. FRP e linguaggio FOR sono equivalenti: in entrambi i casi il numero di iterazioni/valutaioni ricorsive è limitato e noto a priori. Ci sono funzioni totali calcolabili che non possono essere espresse come FRP, per esempio la funzione di Ackermann.