Insieme K

Esistono insiemi r.e. che non sono ricorsivi, cioè per cui si può decidere l'appartenenza ma non la non appartenenza in un numero finito di passi?

$$K = \{i \mid \varphi_i(i)\downarrow\}$$

è r.e. $K = \mathrm{dom}(\psi)$,

$$\psi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_n(n)\downarrow \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è r. supponiamo per assurdo che lo sia. Definiamo:

$$\psi(n) = \begin{cases} \varphi_n(n) + 1 & n \in K \iff \chi_K(n) = 1 \\ 0 & n \notin K \iff \chi_K(n) = 0 \end{cases}$$

χ_K è calcolabile totale (K r.), quindi anche ψ lo è, e per C-T ha un indice. Se $\psi = \varphi_{\overline{n}}$, allora:

$$\psi(\overline{n}) = \begin{cases} \varphi_{\overline{n}}(\overline{n}) & \overline{n} \in K \\ 0 & \overline{n} \notin K \end{cases}$$

- se $\overline{n} \in K$ (ovvero $\varphi_{\overline{n}}(\overline{n})\downarrow$), allora $\psi(\overline{n}) = \varphi_{\overline{n}}(\overline{n}) = \varphi_{\overline{n}}(\overline{n}) + 1$;
- altrimenti, $\varphi_{\overline{n}}(\overline{n}) = 0$ e $\varphi_{\overline{n}}(\overline{n})\uparrow$.

In entrambi i casi si ha una contraddizione, quindi K non può essere ricorsivo.

Si conclude anche che $\overline{K}$ non è r.e., altrimenti K sarebbe ricorsivo.

Applicazioni

K è un insieme utile nella pratica:

- bootstrapping di compilatori: $C_L^{L\to A}(C_L^{L\to A}) = C_A^{L\to A}$;
- problema dell'arresto:

$$K_0 = \{(x,y) \mid \varphi_x(y)\downarrow\} = \{(x,y) \mid \exists z \,.\, T(x,y,z)\}$$

  non è r.:

$$(x,x) \in K_0 \iff \varphi_x(x)\downarrow \iff x \in K$$

  quindi se K_0 fosse r. lo sarebbe anche K.