Insieme degli indici che rappresentano funzioni

A si dice i.i.r.f. se

$$\forall i, j \;.\; i \in A \land \varphi_i = \varphi_j \implies j \in A.$$

Se $\varnothing \neq A \neq \mathbb{N}$, allora $K \leq A \lor K \leq \overline{A}$ (anche entrambe, e.g. $\textsc{Tot}$).

Nel caso generale un insieme i.i.r.f. non è $\mathcal{RE}$ (e.g. $\textsc{Tot}$)

Dimostrazione

Sia i_0 uno degli indici della funzione ovunque indefinita. Allora, $i_0 \in \overline{A}$ o $i_0 \in A$. Consideriamo il primo caso; l'altro è simmetrico.

Visto che $A \neq \varnothing$, $\exists i_1 \in A$, e $\varphi_{i_0} \neq \varphi_{i_1}$ perché A i.i.r.f.

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \varphi_{i_1}(y) & x \in K \\ \varphi_{i_0}(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è calcolabile perché $\forall y \;.\; \varphi_{i_0}(y) \uparrow$.

$$\psi(x, y) \overset{\text{C-T}}{=} \varphi_i(x, y) \overset{s_1^1}{=} \varphi_{s(i,x)}(y) \overset{f(x)=s(i,x)}{=} \varphi_{f(x)}(y),$$

e

$$\begin{aligned} x \in K &\implies \forall y \;.\; \varphi_{f(x)}(y) = \varphi_{i_1}(y) \implies f(x) \in A \\ x \notin K &\implies \forall y \;.\; \varphi_{f(x)}(y) = \varphi_{i_0}(y) \implies f(x) \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Essendo f calcolabile totale, $K \leq A$