Insiemi ricorsivamente enumerabili

I è ricorsivamente enumerabile (o *semi-decidibile*) $\iff \exists i \,.\, I = \mathrm{dom}(\varphi_i)$.

Proprietà:

- I ricorsivo $\implies$ ricorsivamente enumerabile:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \chi_I(x) = 1 \\ \text{indefinito} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $I, \overline{I}$ ricorsivamente enumerabili $\iff$ ricorsivi

  $\implies$ se $I = \mathrm{dom}(\varphi_i), \overline{I} = \mathrm{dom}(\varphi_j)$, allora per calcolare $\chi_I(x)$ si eseguono $M_i(x)$ e $M_j(x)$ in parallelo. Esattamente una delle due per qualche input termina; se è M_i allora $\chi_I(x) = 1$, altrimenti 0.

  $\impliedby$ per la prima proprietà.

- **teorema** enumerabilità degli elementi: $I \neq \varnothing$ è ricorsivamente enumerabile $\iff \exists f$ calcolabile totale $.\ I = \mathrm{im}(f)$

  $\implies$ procedimento a coda di colomba:

  - per prima cosa è necessario individuare un elemento di I. Per ogni coppia $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ si fanno m passi di calcolo di $\varphi_i(n)$. Visto che $I \neq \varnothing$, per qualche input $\overline{n}$ la valutazione termina, dopo un certo numero di passi.
  - a questo punto, indicata con $\langle n, m \rangle$ la codifica a coda di colomba di (n, m), si definisce:

$$f(\langle n, m \rangle) = \begin{cases} n & M_i(n) \to^m (h, \rhd w) \\ \overline{n} & \text{altrimenti} \end{cases} .$$