Teorema di ricorsione (calcolabilità)

$$\forall f \text{ calcolabile totale } . \exists n . \varphi_n = \varphi_{f(n)}$$

n è detto punto fisso di f.

Il teorema afferma che f trasforma almeno un programma in un altro equivalente; si comporta come un compilatore per quegli input. Per esempio,

$$f(n) = n + 1 \implies \forall g \text{ calcolabile } . \exists i . g_i = g_{i+1}$$

Dimostrazione

(1)

$$\begin{aligned}
\psi(u, z) &= \begin{cases} \varphi_{\varphi_u(u)}(z) & \text{se } \varphi_u(u) \downarrow \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases} \\
&= \varphi_i(u, z) && (\psi \text{ calcolabile}) \\
&= \varphi_{s(i,u)}(z) && (\text{t. } s_1^1, s \text{ calc., tot. e iniettiva}) \\
&= \varphi_{d(u)}(z) && d(u) = \lambda u.s(i, u)
\end{aligned}$$

(2) $\varphi_v = f \circ d$ è calcolabile e totale (lo sono f, d)

(3) $n = d(v)$

n è punto fisso di f:

$$\varphi_n \underset{\substack{\exists! v, \\ d \text{ in.}}}{\overset{(3)}{=}} \varphi_{d(v)} \overset{(1)}{=} \varphi_{\varphi_v(v)} \overset{(2)}{=} \varphi_{f(d(v))} \overset{(3)}{=} \varphi_{f(n)}$$