Lemma del logaritmo

Date le distribuzioni di probabilià p_i e q_i,

$$-\sum_{i=1}^{m} p_i \log_b p_i \leq -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_b q_i$$

Dimostrazione

Dimostriamo per $b = e$, la disuguaglianza vale anche per altre basi visto che basta moltiplicare per una costante positiva.

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^{m} p_i \log q_i \\
\Longleftarrow &\sum_{i=1}^{m} p_i (\log q_i - \log p_i) \leq 0 \\
\Longleftarrow &\sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = && \log x \leq x - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{m} q_i - \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$