

Matrice canonica di un codice

Metodo per la decodifica a massima verosimiglianza.

Coset

Dato un codice lineare C e il vettore $w \in \mathbb{F}_2^n$, il coinsieme di C e w è $C' = \{w + x_i \mid x_i \in C\}$. Un elemento con peso di Hamming minimo in C' è detto *coset leader*.

Se $w \in C$, allora $C' = C$. Quindi:

- i coset si costruiscono a partire da $w \notin C$, e C' contiene i vettori di errore che producono w a partire dalle varie parole di codice;
- il coset leader è l'errore di peso minimo che può produrre w ;
- ci sono 2^{n-k} coset distinti (tanti quante le sindromi), che sono anche disgiunti.

Matrice canonica

Matrice $2^{n-k} \times 2^k$ che contiene tutti i 2^n vettori di dimensione n con:

- le parole di codice nella prima riga, con la parola nulla in prima posizione;
- nella prima colonna ci sono i coset leader, ciascuno il vettore di errore minimo corrispondente ad una sindrome;
- l'elemento in posizione i, j si ottiene sommando l' i -esimo coset leader con la j -esima parola di codice.

Può essere usata per la correzione di errori: si individua nella matrice il vettore y' ricevuto e si stima che quello inviato fosse il primo della colonna.

Calcolo dei coset leader

Se la sindrome compare come colonna j -esima della matrice di controllo di parità, allora il coset leader è il vettore che ha un unico 1 in posizione j ; altrimenti si prende una combinazione lineare di altri coset le cui sindromi danno quella considerata se combinate allo stesso modo.

Mi sa che in un codice di Hamming non serve mai fare combinazione lineare.

Tabella di decodifica

Variante più efficiente: si memorizzano le associazioni tra sindromi e coset leader; ricevuto y' si calcola la sua sindrome e si somma a y' il coset leader corrispondente per ottenere l' y più probabile.

Probabilità di errore

Si possono correggere gli errori corrispondenti ai coset leader della tabella. Un codice che riesce a correggere t errori ha tutti i vettori di peso $\leq t$ come coset leader.

La probabilità che il vettore di errore sia nella tabella, ovvero che la correzione sia corretta è:

$$\sum_{i=0}^n N_i \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i}$$

dove N_i è il numero di coset leader di peso i e α la probabilità che un bit venga modificato durante la trasmissione.