Canale binario simmetrico

Un BSC con alfabeti $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2\}$ ha:

- $p(y_1 \mid x_2) = p(y_2 \mid x_1) = \alpha$ (probabilità di errore);
- $p(y_1 \mid x_1) = p(y_2 \mid x_2) = 1 - \alpha$,

quindi la matrice di probabilità di transizione è $\left(\begin{smallmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{smallmatrix}\right)$.

Definito $p = p(x_1)$ e

$$\Omega(q) = -q \log q - (1-q)\log(1-q),$$

si ha che:

- $H(Y) = \Omega(p(y_1)) = \Omega(\alpha + p - 2\alpha p)$
- $H(Y \mid X) = \Omega(\alpha)$ (entropia di errore)
- $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = \Omega(\alpha + p - 2\alpha p) - \Omega(\alpha)$
- $C_s = 1 - \Omega(\alpha)$ (per $p(y_1) = \alpha + p - 2\alpha p = \frac{1}{2}$, ovvero $p = \frac{1}{2}$), quindi un canale senza rumore ha capacità 1.

Dimostrazione

- di $H(Y) = \Omega(\alpha + p - 2\alpha p)$:

$$p(y_1) = p(1-\alpha) + (1-p)\alpha = \alpha + p - 2\alpha p$$

- di $H(Y \mid X) = \Omega(\alpha)$:

$$\begin{aligned} H(Y \mid X) &= -\sum_{i=1}^{m} p(x_i) \sum_{j=1}^{k} p(y_j \mid x_i) \log p(y_j \mid x_i) \\ &= -p((1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha \log \alpha) - (1-p)((1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha \log \alpha) \\ &= -(p + 1 - p)((1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha \log \alpha) \\ &= \Omega(\alpha) \end{aligned}$$