Lemmi sulla forma dell'incertezza di un esperimento con esiti equiprobabili

Lemma 1.1

f è una funzione positiva, crescente e per cui vale $f(x^n) = nf(x)$ se e solo se è della forma $f(x) = c \log x$.

Dimostrazione

$\Longleftarrow$ proprietà del logaritmo;

$\Longrightarrow$ $\forall x, n \,.\, \exists m$ tale che:

- $2^m \leq x^n < 2^{m+1}$, e analogamente
- $m \leq n \log x < m + 1$.

Applicando f alla prima disuguaglianza e dividendo per $nf(2)$:

$$\begin{aligned} f(2^m) \leq f(x^n) &< f(2^{m+1}) \\ mf(2) \leq nf(x) &< (m+1)f(2) \\ \frac{m}{n} \leq \frac{f(x)}{f(2)} &< \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Questo vale per ogni n, e per $n \to +\infty$ si ottiene $\frac{f(x)}{f(2)} = \frac{m}{n}$.

Allo stesso modo, dividendo per n la seconda disuguaglianza e portando al limite si ottiene $\log x = \frac{m}{n}$, quindi $f(x) = f(2) \log x$.

Lemma 1.3

Se X è un esperimento con k esiti equiprobabili, allora $H(X) = c \log k$.

Dimostrazione

$H(X)$ dipende solo da k, quindi possiamo indicarla con $h(k)$. Per il lemma sull'incertezza di esperimenti ripetuti,

$$h(k^n) = H(Y^n) = nH(Y) = nh(k).$$

Inoltre per l'assioma 2 $h(k)$ è crescente, quindi si può applicare il lemma 1.1 ed ottenere la tesi.