Dimostrazione della definizione di entropia

Dimostriamo che l'unica funzione che soddisfa i tre assiomi è

$$H(p_1, \dots, p_n) = -c \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

H soddisfa gli assiomi

1. ovvio;
2. $H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = c \log n < c \log(n+1)$;
3. se l'esperimento X è scomposto in Y e $Z^{(1)}, \dots, Z^{(h)}$, vale $p(x_i) = p(y_j)p(z_l^{(j)})$ per qualche valore di j, l. Quindi:

$$\begin{aligned}
H(X) &= -c \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i) \\
&= -c \sum_{j=1}^{h} \sum_{l=1}^{n_j} p(y_j)p(z_l^{(j)}) \log \Big(p(y_j)p(z_l^j) \Big) \\
&= -c \sum_{j=1}^{h} \sum_{l=1}^{n_j} p(y_j)p(z_l^{(j)}) \log p(y_j) - c \sum_{j=1}^{h} \sum_{l=1}^{n_j} p(y_j)p(z_l^{(j)}) \log p(z_l^j) \\
&= -c \sum_{j=1}^{h} p(y_j) \log p(y_j) - c \sum_{j=1}^{h} p(y_j) \sum_{l=1}^{n_j} p(z_l^{(j)}) \log p(z_l^j) \\
&= H(Y) + \sum_{j=1}^{h} p(y_j) H(Z^{(j)})
\end{aligned}$$

Non ci sono altre funzioni che li soddisfano

Consideriamo un esperimento X scomposto in:

- un esperimento Y con h esiti, $P(y_j) = \frac{m_j}{m}$;
- h esperimenti $Z^{(j)}$, ciascuno con m_j esiti equiprobabili ($P(z_k^{(j)}) = \frac{1}{m_j}$).

X ha quindi m esiti equiprobabili, e per il lemma sull'incertezza di esperimenti con esiti equiprobabili $H(X) = c \log m$. Applicando l'assioma 3:

$$c \log m = H(Y) + \sum_{j=1}^{h} p(y_j) H(Z^{(j)}),$$

ovvero

$$\begin{aligned}
H(Y) &= c \log m - c \sum_{j=1}^{h} \frac{m_j}{m} \log m_j \\
&= c \sum_{j=1}^{h} \frac{m_j}{m} \log m - c \sum_{j=1}^{h} \frac{m_j}{m} \log m_j \\
&= -c \sum_{j=1}^{h} \frac{m_j}{m} \log \frac{m_j}{m}.
\end{aligned}$$

Per la continuità di H (assioma 1) questo risultato vale anche per probabilità reali.