Correzione di errori con sindrome

Se x è il messaggio inviato, $y' = y + e$ quello ricevuto (con $y = G^t x$ ed e vettore di errore) e A la matrice di controllo di parità, vale:

$$s = Ay' = A(y + e) = Ae$$

perché $Ay = 0$ in quanto y è parola di codice.

Problema:

- la sindrome dipende solo dal vettore di errore — ad ogni sindrome corrispondono 2^k parole di informazione;
- i possibili errori su una parola codificata con n bit sono $2^n - 1$, e la sindrome ha $2^{n-k} - 1$ valori che rappresentano errori — ad ogni sindrome corrispondono più vettori di errore.

Se la sindrome è la i-esima colonna di A, invertendo y'_i si ottiene una parola di codice (che potrebbe però non coincidere con y se si è verificato più di un errore).

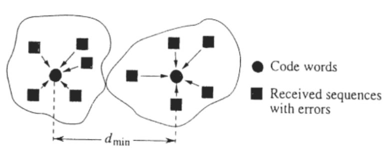
Da questo si ha che possiamo correggere tutti gli errori singoli se e solo se A ha tutte le colonne diverse da zero (quelle nulle non permettono di identificare un errore in quella posizione) e distinte (se due colonne sono uguali non si può stabilire in quale delle due posizioni è avvenuto l'errore).

Decodifica a massima verosimiglianza

Si prende il vettore di errore più probabile tra quelli che possono generare la sindrome ottenuta, supponendo che sia quello con il peso di Hamming minore (numero minimo di errori), ovvero l'y più probabile è la parola di codice più vicina (distanza di Hamming) a y'.

Quindi:

$$y \overset{\text{forse :)}}{=} y' + \arg \min_{\substack{e \text{ t.c.} \\ Ae = Ay'}} |e|_{\mathrm{H}}\,.$$



Qualitative representation of the decision regions assigned to code words.

Maggiore è $d_{\min}$, più grande è il numero di errori che devono verificarsi prima di sbagliare correzione.

Un modo efficiente per applicare questo schema per codici con q non troppo alto è costruire la tabella di decodifica.