Disuguaglianza di Kraft-McMillan

Somma di Kraft

Data una codifica C con parole di codice $\{x_1, \ldots, x_m\}$ su alfabeto A, la somma di Kraft è la quantità:

$$K(C) = \sum_{i=1}^{m} d^{-l_i}$$

con $d = |A|$, $l_i = |x_i|$.

Disuguaglianza di Kraft

- se C è un codice istantaneo, $K(C) \leq 1$ (condizione necessaria);
- esiste un codice istantaneo su alfabeto di dimensione d con lunghezze delle parole di codice $l_1, \ldots, l_m$ se e solo se $\sum_{i=1}^{m} d^{-l_i} \leq 1$.

Diseguaglianza di McMillan

McMillan ha dimostrato che la disuguaglianza di Kraft vale per tutti i codici UD, non solo per quelli prefissi.

Dimostrazione

Per la disuguaglianza di Kraft:

condizione necessaria per i codici istantanei i codici prefissi con alfabeto d sono in corrispondenza con gli alberi d-ari, e il risultato si può dimostare per induzione sulla profondità dell'albero.

esistenza di un codice istantaneo sono date le lunghezze $l_1, \ldots, l_m$ che soddisfano la disuguaglianza di Kraft. Indichiamo con n_l il numero di parole di codice di lunghezza l, e con L la lunghezza massima. Si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} d^{-l_i} = \sum_{l=1}^{L} n_l d^{-l} &\leq 1 \\
n_1 d^{-1} + n_2 d^{-2} + \cdots + n_L d^{-L} &\leq 1 \\
n_1 + n_2 d^{-1} + \cdots + n_L d^{-L+1} &\leq d & \implies n_1 \leq d \\
n_2 d^{-1} + \cdots + n_L d^{-L+1} &\leq d - n_1 \\
n_2 + n_3 d^{-1} + \cdots + n_L d^{-L+2} &\leq d(d - n_1) & \implies n_2 \leq d(d - n_1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Quindi possiamo costruire un codice prefisso tramite un albero d-ario, con n_1 foglie e $d - n_1$ nodi interni di profondità 1, n_2 foglie e $d(d - n_1)$ nodi interni di profondità 2... e la disuguaglianza garantisce che non avremo mai bisogno di più nodi in un livello di quanti sono disponibili.