

Esistenza di funzioni non calcolabili (MdT)

Numerabilità delle macchine di Turing

Le macchine di Turing sono numerabili:

- possiamo rappresentare ciascuna macchina come input per una MdT universale;
- a ciascun simbolo assegnamo una cifra.

Otteniamo quindi un numero naturale per ogni macchina di Turing e viceversa.

Diagonalizzazione di Cantor

Le funzioni, invece, non sono numerabili: consideriamo le funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi dei naturali. Possiamo rappresentarle in una tabella come segue:

	0	1	2	3	...
f_0	0	1	1	0	...
f_1	1	0	0	0	...
\vdots					

Costruiamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_x(x) = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

che differisce per almeno un valore da tutte quelle contenute nella tabella. Segue che le funzioni non sono numerabili.

Funzioni non calcolabili

Dal momento che esistono più funzioni che macchine di Turing, se la tesi di Church-Turing è vera allora esistono funzioni non calcolabili.