Master theorem

Detto anche teorema dell'esperto o teorema principale, permette di risolvere *relazioni di ricorrenza bilanciate*, ovvero espressioni della forma

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n \leq n' \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & n > n' \end{cases}$$

con $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ definitivamente positiva. $f(n)$ rappresenta il costo di dividere il problema in a parti di dimensione $\frac{n}{b}$ e di combinare le soluzioni.

Il teorema afferma che:

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ per una costante $\epsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$;
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ per una costante $\epsilon > 0$ e se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ per una costante $c < 1$ e tutti gli n sufficientemente grandi (condizione di regolarità), allora $T(n) = \Theta(f(n))$.

Se n è una potenza esatta di b, $n^{\log_b a} = a^{\log_b n}$ è il numero di foglie dell'albero di ricorsione, e i tre casi del teorema si basano sul cercare il termine più grande nell'espressione del costo totale:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right).$$

Ci sono casi in cui il teorema non si può applicare anche se la relazione di ricorrenza è bilanciata, in particolare quando $f(n)$ è più grande o piccola di $n^{\log_b a}$ ma non polinomialmente.