Ordinamento topologico con DFS

$G = (V, E)$ DAG. Se $(u, v) \in E$ allora $\eta(u) < \eta(v)$.

TOPOLOGICAL-SORT(G)

chiama DFS(G) per calcolare $v.f$
ogni volta che un nodo diventa nero, si inserisce come testa di una lista
return la lista

Complessità $\Theta(V + E)$.

Correttezza

Utilizziamo il seguente lemma: un grafo orientato G è aciclico se e solo se DFS(G) non genera back edge.

aciclico $\implies$ no back edge per assurdo se ci fosse un back edge (u, v), allora il nodo v sarebbe un antenato di u nella foresta depth first, e il cammino tra i due unito a (u, v) formerebbe un ciclo.

no back edge $\implies$ aciclico supponiamo che G abbia un ciclo. Sia v il primo nodo del ciclo ad essere scoperto, e u il nodo immediatamente precedente a v nel ciclo stesso. Per il teorema del cammino bianco, u sarà discendente di v. Quindi (u, v) è un back edge.

Mostriamo che se $(u, v) \in E$, allora $v.f < u.f$. Segue che u nell'ordinamento si troverà dopo v. Consideriamo un qualsiasi arco (u, v). Quando viene esplorato, v non può essere già grigio, altrimenti (u, v) sarebbe un back edge (in contraddizione con il lemma sopra). Se v è bianco, diventa un discendente di u, quindi $v.f < u.f$ per il teorema delle parentesi; se invece è nero, $v.f$ è già stato assegnato ma dobbiamo ancora assegnare $u.f$, che quindi sarà maggiore. In ogni caso quindi il teorema è dimostrato.