

# Sistemi di dimostrazioni

Dato un insieme di formule  $\Delta$ , un sistema di dimostrazioni (*proof system*) è un insieme  $\mathcal{R}$  di *regole di inferenza* che stabilisce per una data logica in che modo si possono costruire dimostrazioni partendo da un insieme di premesse.

L'obiettivo di una dimostrazione è di verificare:

$$\text{Ipotesi} \models \text{Tesi}.$$

## Dimostrazioni

Una dimostrazione in un proof system  $\mathcal{R}$  di una formula  $Q \in \Delta$  a partire da un insieme di premesse  $\Gamma \subseteq \Delta$  è una sequenza di formule  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  in cui:

1. ogni formula  $Q_i$  è un elemento di  $\Gamma$  oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza di  $\mathcal{R}$  a partire dalle formule in  $\Gamma$  o in  $Q_1, \dots, Q_{i-1}$ ;
2.  $Q_n$  è  $Q$ .

Se esiste una dimostrazione di  $Q$  a partire da  $\Gamma$  in  $\mathcal{R}$  scriveremo

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} Q$$

## Proprietà

Le dimostrazioni sono manipolazioni puramente sintattiche, e la loro capacità di rappresentare il concetto semantico di conseguenza logica dipende dalla presenza di regole di inferenza sufficientemente “potenti”.

Possiamo esprimere questa idea di potenza mediante due caratteristiche che un sistema di dimostrazioni può avere:

**correttezza** se per ogni formula  $P \in \Delta$  e ogni insieme di formule  $\Gamma \subseteq \Delta$

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P \implies \Gamma \models P,$$

ovvero il proof system consente di derivare solo conclusioni che sono conseguenze logiche delle premesse;

**completezza** se per ogni formula  $P \in \Delta$  e ogni insieme di formule  $\Gamma \subseteq \Delta$

$$\Gamma \models P \implies \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} P,$$

cioè consente sempre di dimostrare una conseguenza logica.

Un sistema di dimostrazioni è utile solo se possiede la prima proprietà, ma la seconda non è strettamente necessaria.