

Induzione

Una definizione ricorsiva definisce un oggetto in termini di sé stesso. Non tutte le definizioni ricorsive hanno senso ($f(x) \mapsto f(x)$ no), ma tra quelle che funzionano si distinguono quelle per induzione, che definiscono un oggetto in termini di istanze più piccole di sé stesso.

Definizione induttiva di un insieme

clausola base stabilisce che certi oggetti appartengono all'insieme:

$$0 \in \mathbb{N}$$

clausola induttiva descrive in che modo gli elementi dell'insieme possono essere usati per produrre altri elementi dell'insieme:

$$n \in \mathbb{N} \implies (n + 1) \in \mathbb{N}$$

clausola terminale stabilisce che l'insieme che si sta definendo non contiene altri elementi oltre a quelli ottenuti dalle due clausole precedenti. Quindi l'insieme definito è il più piccolo che soddisfa la clausola base e quella induttiva:

$$\textit{nessun altro elemento appartiene a } \mathbb{N}$$

Definizione induttiva di una funzione

Su un insieme definito induttivamente consiste nel fornire il valore della funzione sugli elementi che appartenono all'insieme per la clausola base e una regola per calcolare il valore della funzione sugli elementi che vi appartengono in base alla clausola induttiva. Questo garantisce anche che la funzione è totale.

Principio di induzione sui naturali

$$\frac{P(0), \forall n \in \mathbb{N} . P(n) \implies P(n + 1)}{\forall m \in \mathbb{N} . P(m)}$$

La prima premessa è il *caso base*, la seconda il *passo induttivo*.

A volte è necessario ricorrere all'induzione forte:

$$\frac{\forall n \in \mathbb{N} . (P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n - 1)) \implies P(n)}{\forall m \in \mathbb{N} . P(m)}$$

Principio di induzione strutturale

Se $P(x)$ è vera per tutti gli elementi $x \in X$ per la clausola base, e se per ogni modo in cui la clausola induttiva prevede che si possano combinare alcuni elementi $x_0, \dots, x_k \in X$ per ottenere un nuovo elemento $x \in X$ vale che: se $P(x_0), \dots, P(x_k)$ sono vere allora $P(x)$ è vera, allora $P(z)$ è vera per ogni $z \in X$.