

Equivalenza e conseguenza logica come tautologie

Siano P e Q formule proposizionali, e $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$ un insieme finito di formule proposizionali. Allora:

1. $P \equiv Q$ se e solo se $P \Leftrightarrow Q$ è una tautologia;
2. $\Gamma \models Q$ se e solo se $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$ è una tautologia.

Dimostrazione

1. $P \Leftrightarrow Q$ è una tautologia se e solo se è vera per ogni interpretazione, quindi se e solo se per ogni interpretazione P e Q assumono lo stesso valore, che è la definizione di $P \equiv Q$;
2. $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$ è una tautologia se è vera per ogni interpretazione, quindi se e solo se ogni interpretazione \mathcal{I} che rende vera $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ rende vera anche Q , ma \mathcal{I} rende vera $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ se e solo se è un modello di Γ , quindi ogni modello di Γ è anche un modello di Q , cioè $\{P_1, \dots, P_n\} \models Q$.