$|A \times B|$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Dimostrazione

$S_a = \{(a, b) \mid b \in B\}$ per un elemento fissato $a \in A$.

1. $|S_a| = |B|$ per costruzione;
2. $a \neq a' \implies S_a \cap S_{a'} = \varnothing$ perché il primo elemento delle coppie differisce sempre;
3. $\bigcap_{a \in I} S_a = \varnothing$ per ogni $I \subseteq A$ tale che $|I| \geq 2$ per l'osservazione precedente;
4. $\bigcup_{a \in A} S_a = A \times B$.

$$\begin{aligned}
|A \times B| &= \left| \bigcup_{a \in A} S_a \right| && (4) \\
&= \sum_{a \in A} |S_a| && \text{(inclusione-esclusione, 3)} \\
&= \sum_{a \in A} |B| && (1) \\
&= |A| \cdot |B|
\end{aligned}$$