Linguaggio non riconoscibile da un automa a stati finiti

Non esiste alcun automa a stati finiti $\mathcal{A}$ sull'alfabeto $A = \{a, b\}$ e alcuno stato $x \in S$ tali che $\langle\langle x \rangle\rangle = L$ per $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che tale automa esista, e che $m = |S|$ sia finito. Per definizione di L vale che $a^m b^m \in L$, quindi $\exists y \in S, z \in F$ tali che $(x, y) \in T_{a^m}$ e $(y, z) \in T_{b^m}$. Per definizione di T_{a^m} esistono $x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y$ tali per cui esiste una transizione che permette il passaggio dallo stato x_i allo stato x_{i+1} alla lettura di a. Si può definire una funzione $f : \{0, \ldots, m\} \to S$, $i \mapsto x_i$ che non può essere iniettiva per il principio delle buche dei piccioni (infatti la cardinalità del dominio è $m + 1$, quella del codominio m). Di conseguenza devono esistere $j, k \in \{0, \ldots, m\}$ tali che $j < k$ e $x_j = x_k$. Questo significa che si può passare direttamente dallo stato $f(j)$ allo stato $f(k + 1)$, quindi per $o = m + j - k < m$ vale $(x, y) \in T_{a^o}$ e $a^o b^m \in \langle\langle x \rangle\rangle$. L'automa riconosce una stringa che non appartiene ad L: c'è una contraddizione ed $\mathcal{A}$ non può esistere.