Funzioni ricorsive

Funzioni il cui valore è espresso in termini del valore della stessa funzione applicata ad un altro argomento, non necessariamente più piccolo.

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ g(n+1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$g(n)$ si può interpretare in due modi:

interpretazione dichiarativa $g(n)$ è una qualsiasi funzione che soddisfa entrambe le clausole, ovvero che ha valore 0 per $n = 0$ ed è costante in tutti gli altri punti;

interpretazione operazionale si leggono le clausule come istruzioni per calcolare il valore di $g(n)$, che quindi è una funzione parziale in quanto ha valore soltanto per $n = 0$ (negli altri casi la valutazione non termina).

Leggere una definizione ricorsiva *rec* in modo operazionale significa definire una relazione:

$$R_{rec} = \left\{ (n, m) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{partendo da } rec(n) \text{ e applicando iterativamente le clausole} \\ \text{della definizione la valutazione termina con il risultato } m \end{array} \right\}.$$

La definizione ricorsiva della funzione *rec* è *ben data* se R_{rec} è totale e univalente. Per il teorema di Rice non esiste un procedimento per stabilire se una definizione ricorsiva qualsiasi è ben data, ma si possono individuare condizioni sufficienti: per esempio le definizioni induttive sono ben date, e anche quelle che rispettano i seguenti criteri:

1. per ogni elemento $a \in A$ c'è esattamente una clausola della definizione applicabile per valutare $rec(a)$;

2. la relazione $\prec_{rec}$ è ben fondata.