Relazioni di equivalenza

$R \subseteq A \times A$ è una relazione di equivalenza se è riflessiva, transitiva e simmetrica. id_A e $A \times A$ sono relazioni di equivalenza, $\varnothing_{A,A}$ no nel caso generale.

$$[a]_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$$

è la **classe di R-equivalenza di** a.

$$[a]_{id_A} = \{a\} \qquad [a]_{A\times A} = A$$
$$(a,b) \in R \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$$

L'insieme delle classi di R-equivalenza

$$EC_R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

è una partizione di A, infatti:

- ogni insieme $X \in EC_R$ è diverso da $\varnothing$, dal momento che la classe di equivalenza di a contiene almeno a;
- per lo stesso motivo è garantita la copertura di A;
- tutti gli insiemi sono disgiunti perché se non lo sono sono uguali (vedi sopra).

Viceversa ad ogni partizione $\mathcal{F} = \{X_i\}_{i \in I}$ di A si può associare la relazione di equivalenza $Ker(f_{\mathcal{F}})$, dove $f_{\mathcal{F}}$ è definita come:

$$f_{\mathcal{F}} = \{(a,i) \in A \times I \mid a \in X_i\}$$