Insiemi in biiezione

Due insiemi A e B si dicono in biiezione (o in corrispondenza uno a uno) se esiste almeno una biiezione $i : A \to B$. In tal caso si può scrivere $A \cong B$.

$$2 = \{0, 1\} \qquad Bool = \{t, f\} \qquad 2 \cong Bool$$

Questo significa che ci si può spostare tra i due insiemi senza perdere informazioni, eseguendo operazioni in un insieme che permette di effettuarle più agevolmente per poi ottenere il risultato nell'insieme appropriato.

	riflessiva	$A \cong A$	$(id_A : A \to A)$
Proprietà:	transitiva	$A \cong B \wedge B \cong C \implies \exists A \cong C$	$(i : A \to B\ j : B \to C \implies$
	simmetrica	$A \cong B \iff B \cong A$	$(i : A \to B \implies \exists i^{op} : B -$

$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

Siano

$$i : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C) \quad ((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$$

e il suo opposto

$$j : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C \quad (a, (b, c)) \mapsto ((a, b), c)$$

Per il teorema di caratterizzazione, i è una biiezione, e quindi gli insiemi sono in biiezione, se e solo se:

- $i; j = id_{(A \times B) \times C}$

$$\begin{aligned} i((a, b), c) &= (a, (b, c)) \\ j(a, (b, c)) &= ((a, b), c) \\ i; j((a, b), c) &= ((a, b), c) \qquad id_{(A \times B) \times C}((a, b), c) = ((a, b), c) \quad \checkmark \end{aligned}$$

- $j; i = id_{A \times (B \times C)}$ si dimostra in modo analogo.

$\wp(A) \cong 2^A$

Per tutti i $B \subseteq A$, la *funzione caratteristica* $\chi_B : A \to 2$ è definita come

$$a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } a \in B \\ 0 & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

Per ogni $f : A \to 2$ definiamo $Sub(f) \subseteq A$ come $Sub(f) = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$
Consideriamo le funzioni

$$\begin{array}{cc} i : \wp(A) \to 2^A & j : 2^A \to \wp(A) \\ B \subseteq A \mapsto \chi_B & f : A \to 2 \mapsto Sub(f) \end{array}$$

Per dimostrare che i è una biezione si dimostra, secondo il teorema di caratterizzazione, che j è la sua inversa:

- $i; j = id_{\wp(A)}$ significa che $j(i(B)) = id_{\wp(A)}(B)\ \forall B \in \wp(A)$, ovvero $Sub(\chi_B) = B$, che segue naturalmente da

$$a \in Sub(\chi_B) \iff \chi_B(a) = 1 \iff a \in B$$

- $j; i = id_{2^A}$ significa che $i(j(f)) = id_{2^A}(f)\ \forall f \in 2^A$, ovvero $\chi_{Sub(f)} = f$, che è immediato perchè

$$\chi_{Sub(f)}(a) = 1 \iff a \in Sub(f) \iff f(a) = 1$$

e

$$\chi_{Sub(f)}(a) = 0 \iff a \notin Sub(f) \iff f(a) = 0$$