Teorema di caratterizzazione

Date $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times A$:

Relazioni

- R è totale se e solo se $id_A \subseteq R; R^{op}$
- R è univalente se e solo se $R^{op}; R \subseteq id_B$
- R è surgettiva se e solo se $id_B \subseteq R^{op}; R$
- R è iniettiva se e solo se $R; R^{op} \subseteq id_A$

Funzioni

Si può rendere più forte la caratterizzazione sostituendo a R^{op} una relazione qualsiasi. R è una funzione se e solo se esiste un S tale che $id_A \subseteq R; S$ e $S; R \subseteq id_B$ (perché con le altre relazioni no?)

Biiezioni

Per una biiezione valgono tutte le relazioni sopra elencate, di conseguenza R è una biiezione se e solo se $R; R^{op} = id_A$ e $R^{op}; R = id_B$.

Inoltre se esiste un S tale che $R; S = id_A$ e $S; R = id_B$ (ovvero S è l'*inversa* di R) allora $S = R^{op}$ (esiste una sola inversa ed è la relazione opposta).
Se S e T sono inverse di R:

$$\begin{aligned} S &= id_B; S && \text{(unità)} \\ &= T; R; S && (T; R = id_B) \\ &= T; id_A && (R; S = id_A) \\ &= T && \text{(unità)} \end{aligned}$$

E per il teorema di caratterizzazione $S = T = R^{op}$