Relazioni di ordinamento

$R \subseteq A \times A$ è una relazione di ordinamento **parziale** se è riflessiva, transitiva e anti-simmetricha.

id_A, $\leq$, e $\{(X, Y) \in \wp(A) \times \wp(A) \mid X \subseteq Y\}$ sono relazioni di ordinamento parziale, $<$ e $\varnothing_{A,A}$ no.

Si utilizza spesso la notazione infissa per esprimere le relazioni di ordinamento: $a \, \mathrm{R} \, b$ significa $(a, b) \in R$.

$\sqsubseteq$ indica una relazione di ordinamento generica, inoltre

$$\sqsubset = \{(x, q) \mid x \sqsubseteq y \land x \neq y\}.$$

R relazione di ordinamento parziale su A si dice **ordinamento** se per tutti gli $(a, b) \in A \times A$ vale $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

Caratterizzazione: R è un ordinamento se rispetta la caratterizzazione delle proprietà e se $A \times A \subseteq R \cup R^{op}$.

Ordinamento lessicografico

Dato un insieme A ed un ordinamento $\sqsubseteq_A \subseteq A \times A$ si vuole definire un ordinamento $\sqsubseteq_{A^*} \subseteq A^* \times A^*$ sull'insieme delle stringhe su A.
Sia $\sqsubseteq_{A^n}$ un ordinamento sulle sequenze su A di lunghezza n tale per cui $s \sqsubseteq_{A^n} t$ se e solo se esiste un $i \in \{0, ..., n\}$ tale per tutti gli indici $j < i$ vale che $a_j = a'_j$, e $a_i \sqsubset a'_i$.
Si può estendere questo ordinamento a sequenze di lunghezza arbitraria per ottenere l'ordinamento lessicografico: per tutte le stringhe $s = a_0 a_1 ... a_n$ e $t = a'_0 a'_1 ... a'_m$ in A^* si ha che $s \sqsubseteq_{A^*} t$ se e solo se esiste un $i \in \mathbb{N}$ tale che per tutti i $j < i$ vale che $a_j = a'_j$ ed almeno una delle seguenti condizioni è vera:

- $a_i \sqsubset_A a'_i$;
- $i = n + 1$ e $n < m$.