Coefficiente binomiale

$B \subseteq A$ tale che $|B| = k$ è un k-insieme di A. Indicata con n la cardinalità di A, il numero di k-insiemi in A è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{(legge dei tre fattoriali)}$$

La stessa quantità equivale alle *combinazioni* di k elementi di A, ovvero tutti i possibili modi di scegliere esattamente k elementi di A ignorando il loro ordine.

Definizione ricorsiva

Esiste una biiezione tra i k-insiemi di A e le sequenze binaria di lunghezza n aventi esattamente k bit a 1. Questo segue dal fatto che $\wp(A) \cong 2^A$.

Si considerino tutte le sequenze binarie di lunghezza n. Se l'ultimo bit b di una sequenza è 0, il resto della sequenza deve avere k bit a 1, altrimenti ne deve avere $k-1$. La clausola ricorsiva è quindi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

La clausola base copre tre situazioni:

1. se $n = 0$ (quindi $k = 0$) c'è una sola sequenza, quella vuota;
2. se $k = 0$ c'è solo la sequenza con tutti i bit a 0;
3. se $k = n$ c'è solo la sequenza con tutti i bit a 1.

quindi

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$