Relazione kernel

Data una funzione $f : A \to B$, la relazione *kernel* di f è definita come

$$Ker(f) = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Vale che:

1. $Ker(f) = f; f^{op}$;
2. $Ker(f)$ è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione

1.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in f; f^{op} &\iff \exists b \in B \,.\, (x, b) \in f \wedge (b, y)^{op} \in f && \text{definizione di ;} \\
&\iff \exists b \in B \,.\, (x, b) \in f \wedge (y, b) \in f && \text{definizione di }^{op} \\
&\iff f(x) = f(y) && f \text{ funzione} \\
&\iff (x, y) \in Ker(f) && \text{definizione di } Ker(f)
\end{aligned}$$

2. $f; f^{op}$ è:

riflessiva in quanto per la caratterizzazione delle relazioni totali $id_A \subseteq f; f^{op}$;

transitiva perché vale la caratterizzazione delle relazioni transitive:

$$\begin{aligned}
(f; f^{op}); (f; f^{op}) &= f; (f^{op}; f); f^{op} && \text{associatività} \\
&\subseteq f; id_B; f^{op} && \text{caratterizzazione univalenza} \\
&= f; f^{op} && \text{unità}
\end{aligned}$$

simmetrica $f; f^{op} = (f; f^{op})^{op}$ per distributività e convoluzione di ^{op}.