Caratterizzazione delle relazioni di equivalenza

La relazione $R \subseteq A \times A$ è una relazione di equivalenza se e solo se esiste un insieme B ed una funzione $f : A \to B$ tale che $R = Ker(f)$, ovvero se e solo se R è il kernel di qualche funzione.

Dimostrazione

- se R è una relazione di equivalenza, allora esistono B e f. Prendiamo come B l'insieme di tutte le classi di R-equivalenza e come f la funzione che associa ad ogni elemento $a \in A$ la sua classe di R-equivalenza ($a \mapsto [a]_R$). Dimostriamo che $R = Ker(f)$:

$$(x, y) \in Ker(f) \iff f(x) = f(y) \iff [x]_R = [y]_R \iff (x, y) \in R$$

- se esistono B e f tali che $R = Ker(f)$, allora segue immediatamente che R è una relazione di equivalenza perché tutte le relazioni kernel lo sono.