Chiusure

Sia data la relazione $R \subseteq A \times A$.

Riflessiva

$R \cup id_A$ è la chiusura riflessiva di R, ovvero la più piccola relazione riflessiva che contiene R.

- $R \cup id_A$ è riflessiva ($id_A \subseteq R \cup id_A$);
- $R \subseteq R \cup id_A$;
- per ogni $S \subseteq A \times A$ se S è riflessiva e $R \subseteq S$ allora $R \cup id_A \subseteq S$.

Per esempio $>$ non è riflessiva ma $> \cup id_A = \geq$ sì.

Simmetrica

$R \cup R^{op}$ è la chiusura simmetrica di R, ovvero la più piccola relazione simmetrica che contiene R.

- $R \cup R^{op}$ è simmetrica ($R^{op} \subseteq R \cup R^{op}$);
- $R \subseteq R \cup R^{op}$;
- per ogni $S \subseteq A \times A$ se S è simmetrica e $R \subseteq S$ allora $R \cup R^{op} \subseteq S$.

Transitiva

La chiusura transitiva di R si ottiene facendo $R \cup (R; R) \cup (R; R; R) \cup (R; R; R; R) \cup \ldots$. Il numero di volte che l'operazione dev'essere ripetuta dipende dalla relazione, e se R non è ciclica prima o poi si raggiunge un punto a partire dal quale il risultato di tutte le composizioni è $\varnothing$. Nella definizione si assume che sia necessario un numero infinito di composizioni. Dato

$$R^0 = id_A \qquad R^{n+1} = R; R^n$$

per cui vale, per esempio,

$$\begin{aligned} R^4 &= R; (R; (R; (R; id_A))) \\ &= R; R; R; R \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(associatività, unità)}, \end{aligned}$$

la chiusura transitiva di R equivale a

$$R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n.$$

La chiusura transitiva di R è la più piccola relazione transitiva che contiene R.

- R^+ è transitiva;
- $R \subseteq R^+$;
- per ogni $S \subseteq A \times A$ se S è transitiva e $R \subseteq S$ allora $R^+ \subseteq S$.

Riflessiva e transitiva

$$R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n = R^0 \cup R^+ = id_A \cup R^+$$

è la **stella di Kleene**, ovvero la chiusura riflessiva e transitiva di R, che è la più piccola relazione riflessiva e transitiva che contiene R.

- R^* è riflessiva transitiva;
- $R \subseteq R^*$;
- per ogni $S \subseteq A \times A$ se S è riflessiva e transitiva e $R \subseteq S$ allora $R^* \subseteq S$.