

Rango e immagine

Sia A una matrice $m \times n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare tale che $f(x) = Ax$:

$$(1) \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n)$$

$$(2) \operatorname{rk}(A) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Utile anche per trovare la $\dim(\ker(f)) = n - \operatorname{rk}(A)$.

Dimostrazione

$$(1) f(x_1, \dots, x_n) = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) \text{ e viceversa;}$$

$$(2) \text{ segue da (1) e definizione di rango.}$$