

Dipendenza lineare

v_1, \dots, v_k sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare nulla ma non banale. Se invece ogni combinazione nulla è banale i vettori si dicono linearmente indipendenti.

v_1, \dots, v_k sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri:

$\Rightarrow 0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, \exists i . \alpha_i \neq 0$. Allora

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k;$$

\Leftarrow se $v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_k v_k$, si può sottrarre v_i a entrambi i membri e si ottiene una combinazione lineare nulla non banale (perché $\alpha_i = -1$).

In particolare, v e w sono linearmente dipendenti se e solo se sono uno multiplo dell'altro.