Formula di Grassmann

Se U e W sono sottospazi di V e $\dim(V) \neq \infty$, allora

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Dimostrazione

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $U \cap W$. Si completa a base $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s\}$ di U e $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t\}$ di W. Dimostriamo che $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\}$ è una base di $U+W$:

generano $U+W$:

$$\begin{aligned}
\overbrace{u+w}^{\in U+W} &= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s) + (\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k + \delta_1 w_1 + \dots + \delta_s w_s) \\
&= (\alpha_1 \gamma_1) v_1 + \dots + (\alpha_k + \gamma_k) v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s + \delta_1 w_1 + \dots + \delta_s w_s \\
&\in \operatorname{Span}(\dots)
\end{aligned}$$

sono linearmente indipendenti:

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k}_{v \in U \cap W} + \underbrace{\beta_1 u_1 + \dots \beta_s u_s}_{u \in U} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t}_{w \in W} = 0_V,$$

ovvero $w = -(v+u)$, ma poiché $v \in U$ e $v+u \in U$, allora $w \in U \cap W$ e si può scrivere:

$$w = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k.$$

quindi, eguagliando i due modi di scrivere w,

$$-\delta_1 v_1 - \dots - \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t = 0_V.$$

Essendo $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t$ una base di W, allora tutti i coefficienti devono essere 0, in particolare $\gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$ e $w = 0_V$.

Utilizzando l'uguaglianza di prima, otteniamo che $u + v = 0_V$, quindi $u = -v$ e si può ripetere lo stesso procedimento per verificare che anche $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0$.

Concludiamo:

$$\dim(U+W) = k+s+t = \underbrace{(k+s)}_{\dim(U)} + \underbrace{(k+t)}_{\dim(W)} - \underbrace{(k)}_{\dim(U \cap W)}$$