Dimensione di sottospazi

Se V è uno spazio vettoriale con $\dim(V) \neq \infty$ e $W \subseteq V$ è un suo sottospazio, allora $\dim(W) \leq \dim(V)$, e $\dim(W) = \dim(V)$ se e solo se $W = V$.

Dimostrazione

- $\dim(V) \neq \infty \implies \nexists$ liste arbitrariamente lunghe di vettori di V linearmente indipendenti $\implies \nexists$ liste arbitrariamente lunghe di vettori di W linearmente indipendenti $\implies W$ ha base B;

- completo B a base C di V:

$$B \subseteq C \implies |B| \leq |C| \implies \dim(W) \leq \dim(V).$$