Prodotto scalare

Il prodotto scalare standard (o euclideo) tra due vettori in $\mathbb{R}^n$ è:

$$\langle v, u\rangle = v \cdot u = v^{\mathsf{t}} u = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \|v\|\,\|u\| \cos\theta$$

In generale, un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è una funzione che rispetta tre proprietà:

(1) $v \cdot w = w \cdot v$;

(2) fissato v, $w \mapsto v \cdot w$ è lineare (lo stesso vale se si fissa w);

(3) $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0 \iff v = 0$.

La proprietà (2) implica, per esempio, che

$$\lambda v \cdot w = \lambda(v \cdot w) \qquad \text{e} \qquad v \cdot (w + w') = (v \cdot w) + (v \cdot w').$$

Dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni

In $\mathbb{R}^2$:

$$v \cdot e_1 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos\theta_1 = a_1 \qquad v \cdot e_2 = \|v\| \cdot 1 \cdot \cos\theta_2 = a_2$$

ma a_1 e a_2 sono le proiezioni di v su e_1 e e_2, quindi $v = a_1 e_1 + a_2 e_2$ e analogamente $w = b_1 e_1 + b_2 e_2$. Di conseguenza:

$$v \cdot w = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot w = a_1(e_1 \cdot w) + a_2(e_2 \cdot w) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$