Coordinate

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora

$$\forall v \in V \ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ . \ v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le coordinate di v rispetto a B.

Dimostrazione

Le coordinate esistono perché B genera V. Supponiamo che

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Si ha che

$$v - v = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0_V.$$

Essendo $v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti, $\forall i \ . \ \alpha_i - \beta_i = 0$, quindi tutti i coefficienti β_i sono uguali ai rispettivi α_i. Le coordinate devono quindi essere uniche.