Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice quadrata è una funzione $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\det(A) = |A| = 0 \iff \text{le righe di } A \text{ sono l.d.} \iff \text{le colonne sono l.d.}$$

Definizione induttiva

$n = 0$ $\det([a]) = a$

$n > 0$ se A_{ij} è la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) && (i \text{ fisso}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) && (j \text{ fisso})\end{aligned}$$

Dimostrazione della proprietà

Le righe di A sono le colonne di A^{t} e $\det(A) = \det(A^{\mathsf{t}})$, quindi è sufficiente dimostrare per le colonne.
Eseguiamo l'algoritmo di Gauss per ottenere una matrice triangolare superiore B.

$\det(A) = 0 \implies$ **colonne dipendenti**
: $\det(B) = \lambda \det(A) = 0$, quindi B contiene uno 0 nella diagonale, quindi c'è una colonna che non ha pivot e le colonne di B sono dipendenti, quindi lo sono anche quelle di A (perché $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$);

colonne dipendenti $\implies \det(A) = 0$
: come sopra al contrario.

Interpretazione geometrica

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{area del parallelogramma definito da } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Il determinante è il fattore per cui viene moltiplicata un'area a cui viene applicata la trasformazione lineare.

Verifica per righe con $n = 2$

$\det(A) = 0 \implies$ **righe l.d.:** se $ad - bc = 0$ allora:

se $a = 0$: $b = 0$ o $c = 0$:

$b = 0$ la prima riga è 0, quindi è c.l. dell'altra;
$c = 0$ prima riga $(0\ b)$ e seconda $(0\ d)$, che è $\frac{d}{b}$ volte la prima.

se $a \neq 0$: Sia $\lambda = \frac{b}{a}$. $ad = bc$, quindi $d = \lambda c$ e $(a\ \ b) = a(1\ \ \lambda)$, $(c\ d) = c(1\ \lambda)$, l.d.

righe l.d. $\implies \det(A) = 0$ $a = c = 0$: $ad - bc = 0$;

$a \neq 0$: $c = \lambda a$, $d = \lambda b$ con $\lambda = \frac{c}{a}$. $ad - bc = \lambda(ab - ab) = 0$;

$c \neq 0$: come sopra.

Similmente si dimostra la dipendenza lineare delle colonne.