Basi e dimensione

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n e $v_1, \ldots, v_n \in V$, allora sono equivalenti:

1. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base;
2. $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti;
3. $v_1, \ldots, v_n$ generano V.

Per esempio, possiamo verificare che $\{1, x-1, x^2-1\}$ è base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ perché sono linearmente indipendenti e $\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3$.

Dimostrazione

$1 \implies 2$ per definizione di base;

$2 \implies 3$ per ipotesi esiste una base $w_1, \ldots, w_n$ di V, quindi $w_1, \ldots, w_n$ generano V e per il lemma usato per dimostrare che tutte le basi hanno la stessa dimensione essendo $v_1, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti allora questi generano V;

$3 \implies 1$ si estrae una base di $h \leq n$ vettori da $v_1, \ldots, v_n$; essendo $\dim(V) = n$, $h = n$ quindi $v_1, \ldots, v_n$ è base.