Dimensione di un sottospazio ortogonale e completamento a base ortonormale

Dati $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ ortonormali, $\dim\langle v_1, \ldots, v_r \rangle^\perp = n - r$. Inoltre esistono $v_{r+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tali per cui $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

La prima proposizione vale anche se $v_1, \ldots, v_r$ sono linearmente indipendenti, perché si possono sostituire con una base ortonormale di $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r)$ senza modificare il sottospazio ortogonale.

Dimostrazione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ un'applicazione lineare definita da:

$$f(v) = \begin{pmatrix} v \cdot v_1 \\ \vdots \\ v \cdot v_r \end{pmatrix}.$$

$f(v_1), \ldots, f(v_r)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^r$, quindi $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^r$ e $\dim(\ker(f)) = n - r$. Ma $\ker(f) = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^\perp$, quindi la prima proposizione è dimostrata.

Sia $v_{r+1}, \ldots, v_n$ una base ortonormale di $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle^\perp = \ker(f)$: questa ha $n-m$ vettori per il teorema precedente. $v_1, \ldots, v_r$ formano un sistema ortonormale e sono ortogonali a $v_{r+1}, \ldots, v_n$ (a loro volta ortonormali), quindi $v_1, \ldots, v_n$ sono n vettori linearmente indipendenti $\implies$ base di $\mathbb{R}^n$.