Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa.

Corollario

Un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha esattamente $n = \deg(p(x))$ radici (contando le molteplicità). Inoltre, se z è radice di un polinomio a coefficienti reali anche $\overline{z}$ lo è.

Dimostrazione

- Se z_1 è radice complessa di $p(x)$, allora possiamo scrivere

  $$p(x) = (x - z_1)p_1(x),$$

  dove $p_1(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$. Ripetiamo l'operazione n volte fino ad arrivare a $p_n(x) = a_n$: avremo scritto

  $$p(x) = a_n(x - z_1) \dots (x - z_n)$$

  perché il teorema fondamentale ci garantisce che z_i esiste.

- se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ con $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ e radice $z \in \mathbb{C}$,

  $$0 = \overline{0} = \overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = a_n \overline{z^n} + \cdots + a_0 = p(\overline{z}).$$