Molteplicità di un autovalore

Dato un autovalore λ dell'applicazione lineare $f : V \to V$ con base associata A, la

molteplicità algebrica di λ è la molteplicità della radice λ di $P_A(t)$;

molteplicità geometrica di λ è $\dim(V_\lambda)$.

La molteplicità geometrica è sempre minore o uguale della molteplicità algebrica. In particolare, è uguale per tutti gli autovalori se e solo se f è diagonalizzabile.

Dimostrazione

Siano $\dim(V) = n$, $\dim(V_\lambda) = r$ e $\{v_1, \dots, v_r\}$ base di V_λ. Completiamo a base $B = \{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ di V e scriviamo la matrice associata a f rispetto a B

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_r & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right)$$

Le prime r colonne sono della forma λe_i perché $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ le coordinate rispetto a B di v_i sono e_i e $f(v_i) = \lambda v_i$, quindi $Ae_i = \lambda e_i$, che è vero solo se $A^i = \lambda e_i$. Il polinomio caratteristico è:

$$P_A(t) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & B - tI \end{array}\right) = (\lambda - t)^r \det(B - tI) = (\lambda - t)^r P_B(t)$$

La molteplicità della radice λ di $P_A(t)$ è quindi r più la molteplicità di λ in $P_B(t)$, mentre la molteplicità geometrica è r.

Vale che $\dim(V) \geq \sum$ molteplicità algebriche $(\deg(P_A(t)) \leq n) \geq \sum$ molteplicità geometriche e $\dim(V) = \sum$ molteplicità geometriche $\iff$ f diagonalizzabile, quindi f è diagonalizzabile $\iff$ tutti i suoi autovettori hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica.