Applicazioni lineari

Siano V, W due spazi vettoriali e $f : V \to W$.
f si dice *applicazione (funzione) lineare* se:

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $f(\alpha v) = \alpha f(v) + f(v)$

Segue che f è lineare $\iff f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k)$.
Inoltre se f è lineare $f(0_V) = 0_W$ $(f(0v) = 0f(v))$.

Esempi

$f(v) = 0_W$, $f(v) = v$, $f(x) = 3x$ sono lineari, $f(x) = 3x + 5$ no perché $f(0) \neq 0_W$, $f(x) = x^2$ no perché la somma dei quadrati non è sempre il quadrato della somma.
Fissati $a_1, \ldots, a_n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ è lineare.
Fissata A matrice $m \times n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $f(x) = Ax$ è lineare.
Fissata $A \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$, $f : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \to M_{l \times n}(\mathbb{R})$ $f(X) = AX$ è lineare.
Fissato $a \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ $F(p(x)) = p(a)$ è lineare.
$F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ $F(p(x)) = p'(x)$ è lineare.