Estrazione veloce di basi in $\mathbb{R}^n$

Dato $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) \subseteq \mathbb{R}^n$, si affiancano i vettori colonna in una matrice $n \times k$ e si riduce a scalini. $\dim(V)$ è il numero di pivot, e se i pivot sono nelle colonne $i_1, \ldots, i_h$ allora $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_h}\}$ è una base di V.

Per esempio, se la riduzione a scalini della matrice $(v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, allora $\{v_1, v_3\}$ è base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Dimostrazione

Sia A la matrice tale che $A^i = v_i$, e A' una sua riduzione a scalini.

$$\dim(V) = \mathrm{rk}(A) = \#\text{pivot in } A'.$$

Eliminiamo da A' le colonne senza pivot: la matrice che si ottiene ha lo stesso rango di A. Riapplicando al contrario le mosse di Gauss utilizzate per la riduzione, a partire da questa matrice si può arrivare a A'' con $A''^j = v_{i_j}$. Le colonne di A'' sono una base di V: infatti sono $\dim(V)$ e sono linearmente indipendenti perché eliminandone una qualsiasi il rango della matrice diminuisce.