Dimensione di uno spazio vettoriale

$$\dim(V) = \begin{cases} \infty & \text{se } V \text{ non ha basi} \\ |B| & \text{se } B \text{ è base di } V \end{cases}$$

Per esempio, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathbb{R}_{\leq d}[x]) = d + 1$, $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$.
Vale $\dim(V) = 0$ se e solo se $V = \{0_V\}$. Inoltre $\dim(V) = \infty$ equivale a dire che esistono liste arbitrariamente lunghe di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione

La definizione è ben posta solo se tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.

Utilizziamo il seguente lemma: se $v_1, \dots, v_n$ generano V e $w_1, \dots, w_n \in W$ sono linearmente indipendenti, allora $w_1, \dots, w_n$ generano V.

Siano $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V. Se per assurdo $m > n$, allora essendo $w_1, \dots, w_n$ linearmente indipendenti segue per il lemma precedente che $w_1, \dots, w_n$ generano V, quindi w_{n+1} è combinazione lineare di $w_1, \dots, w_n$ e $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente dipendenti, di conseguenza non sono una base.