Formula di Cramer

Se A è una matrice quadrata invertibile,

$$A\tilde{A} = \det(A)I$$

quindi, essendo $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det(A)}.$$

Dimostrazione

Calcoliamo $A' = A\tilde{A}$:

$$a'_{ij} = a_{i1}(-1)^{1+j}\det(A_{j1}) + \cdots + a_{in}(-1)^{n+j}\det(A_{jn}).$$

Si nota che se $i = j$, questo è lo sviluppo rispetto alla riga i di A, quindi è uguale a $\det(A)$. Per $i \neq j$, è il determinante della matrice che si ottiene sostituendo A_i al posto di A_j, quindi vale 0 perché ci sono due righe uguali. Il risultato finale è proprio $\det(A)I$.