Completamento di basi

Se $v_1, \dots, v_k$ sono vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale V e $v_{k+1} \in V$, allora $v_1, \dots, v_{k+1}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_{k+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

Si può quindi trovare una base di V scegliendo $v_1 \in V$ diverso da 0_V, poi $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$, $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$... finché non si hanno $\dim(V)$ vettori.

Dimostrazione

Dimostriamo il contrario: $v_1, \dots, v_{k+1}$ l.d. $\iff$ $v_{k+1} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$. $\impliedby$ già dimostrato.

$\implies$: esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0_V$. Se $\alpha_{k+1} = 0$ allora $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$, che può essere solo se $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ (perché $v_1, \dots, v_k$ sono l.i.), ma è assurdo perché per ipotesi $v_1, \dots, v_{k+1}$ sono linearmente indipendenti. Segue che $\alpha_{k+1} \neq 0$, quindi $v_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$.