Radice quadrata di una matrice

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, allora

$$\sqrt{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \;.\; \sqrt{A}^2 = A.$$

$\sqrt{A}$ non esiste sempre: in particolare, $A = \sqrt{A}^2 \implies \det(A) = \det(\sqrt{A})^2$, quindi se il determinante di A è negativo $\sqrt{A}$ non esiste.

Se A diagonalizzabile e con autovalori non negativi, $\exists\sqrt{A}$.

Dimostrazione

A **diagonale** se A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

allora $\sqrt{A}$ vale

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

che è possibile perché $\lambda_i \geq 0$

caso generale $A = PDP^{-1}$ con D diagonale. Allora

$$\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1},$$

infatti

$$(P\sqrt{D}P^{-1})^2 = P\sqrt{D}P^{-1}P\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$