Sottospazi e sistemi omogenei

L'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare in n variabili è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il sistema è omogeneo.
Geometricamente, un r-piano in $\mathbb{R}^n$ è sottospazio se e solo se contiene l'origine (n-upla nulla).
In particolare, $W \subseteq V = \mathbb{R}^2$ è sottospazio non banale né totale di V se e solo se W è una retta per l'origine.

Dimostrazione

(i) se x e y sono soluzioni, anche $x + y$ lo è:

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i1}y_1 + \cdots = 0 + 0 = 0$$

(ii) se x è soluzione anche αx lo è:

$$a_{i1}(\alpha x_1) + \cdots = \alpha(a_{i1}x_1 + \dots) = \alpha 0 = 0$$

Le soluzioni di un sistema non omogeneo non contengono l'origine, quindi non possono essere sottospazi.