Determinante del prodotto di matrici

Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$,
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
Verifica per $n = 2$.

Corollario

Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A^{-1} esiste se e solo se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dimostrazione

A^{-1} esiste $\iff$ $f(v) = Av$ è un isomorfismo $\iff$ $\ker(f) = 0 \wedge \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$ $\iff$ $\det(A) \neq 0$. Inoltre $AA^{-1} = I$, $\det(I) = 1$, quindi $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.