Autovalori e polinomio caratteristico

Data $f : V \to V$, v è un autovettore di f per λ se e solo se

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff (f - \lambda id)(v) = 0,$$

quindi λ è autovalore se e solo se $\ker(f - \lambda id) \neq \{0_V\}$.

Se A è la matrice di f rispetto ad una base, allora $A - \lambda I$ è quella di $f - \lambda id$, e

$$\ker(f - \lambda id) \neq \{0_V\} \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

In base a questo definiamo il polinomio caratteristico:

$$P_A(t) = \det(A - tI) \in \mathbb{R}[x].$$

λ è autovalore di f se e solo se è radice di $P_A(t)$.

$P_A(t)$ non dipende da A: se P è la matrice di cambiamento di base,

$$\begin{aligned} P_{PAP^{-1}}(t) &= \det(PAP^{-1} - tI) = \det(PAP^{-1} - tPP^{-1}) = \det(P(A - tI)P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(A - tI)\det(P^{-1}) = \det(A - tI) = P_A(t). \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(t)$ ammette sempre radici complesse, quindi ci sono sempre autovalori complessi.