Immagine di un'applicazione lineare

L'immagine di f è $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$.

- $\mathrm{Im}(f)$ è sottospazio di W.
- se $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ allora $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$

Dimostrazione

- (i) $w, w' \in \mathrm{Im}(f) \implies w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v') \implies w + w' \in f(V)$

  (ii) $w \in \mathrm{Im}(f) \implies w = f(v) \implies \alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v) \implies \alpha w \in f(V)$

  (iii) $0_W = f(0_V) \implies 0_W \in f(V)$

- $$\begin{aligned} f(v) &\overset{gen.}{=} f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &\overset{lin.}{=} \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \\ &\in \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \end{aligned}$$

  vale anche al contrario.