Dimensione e applicazioni lineari

Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e $f : V \to W$ lineare, allora

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)).$$

Dimostrazione

Sia $\{w_1, \dots, w_h\}$ una base di $\mathrm{Im}(f)$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$.
Per definizione di immagine, $\forall i \in \{1, \dots, h\}\ \exists u_i \in V \ .\ f(u_i) = w_i$.
Se $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_h\}$ è una base di V, allora

$$\dim(V) = k + h = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

e il teorema è dimostrato.

linearmente indipendenti siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_h$ tali che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_h u_h = 0_V$$

allora $f(\dots) = f(0_V) = 0_W$ perché f è lineare.

$$\begin{aligned} f(\dots) &= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k) + \beta_1 f(u_1) + \cdots + \beta_h f(u_h) \\ &= \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_h w_h && (f(v_i) = 0_V \text{ e } f(u_i) = w_i) \\ &\implies \beta_1 = \cdots = \beta_h = 0 && (w_1, \dots, w_h \text{ l.i.}) \end{aligned}$$

Segue che $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V$, ma $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti quindi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

generano V $\mathrm{Span}(\dots) \subseteq V$ è ovvio. Dimostriamo che $v \in V$ è contenuto in $\mathrm{Span}(\dots)$: $f(v) \in \mathrm{Im}(f)$,

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_h w_h \\ &\overset{\text{base}}{=} \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_h f(u_h) \\ &\overset{\text{lin.}}{=} f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_h u_h) \\ \implies 0_W &= f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_h u_h) - f(v) \\ &= f(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_h u_h - v}_{\in \ker(f) \text{ con coord. } \beta_1, \dots, \beta_h}) \end{aligned}$$

quindi

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_h u_h - v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$$

e v è combinazione lineare di $\{u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_k\}$.