Isomorfismi e applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Data $f : V \to U$ applicazione lineare con B base di V e C base di U, siano $g : V \to \mathbb{R}^n$ e $h : V \to \mathbb{R}^m$ gli isomorfismi definiti da B e C. Si ha che $h \circ f \circ g^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare con matrice associata rispetto alle basi standard A uguale a $M_{BC}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & U \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, "g^{-1}"] \arrow[r, "v \mapsto Av"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

1. $g^{-1} : \ker(v \mapsto Av) \to \ker(f)$ è isomorfismo;
2. $h : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(v \mapsto Av)$ è isomorfismo.

Questo significa che $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(A))$ è la dimensione dello spazio delle soluzioni di $Av = 0$ e $\dim(\mathrm{Im}(f))$ è il rango di A perché i kernel e le immagini di f e A hanno la stessa dimensione.

Dimostrazione

Per ogni e_i nella base canonica di $\mathbb{R}^n$, $(h \circ f \circ g^{-1})(e_i)$ è l'i-esima colonna di $M_{BC}(f)$, quindi $(h \circ f \circ g^{-1})(v) = M_{BC}(f)v$.

1. $h(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}((v \mapsto Av) \circ g) = \mathrm{Im}(v \mapsto Av)$ (perché $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^n$).