Sottospazio ortogonale

Se $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle v\rangle^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v\rangle = 0\}.$$

$\langle v\rangle^\perp$ è detto sottospazio ortogonale a v.

Se $v = (a_1, \ldots, a_n)$, $\langle v\rangle^\perp$ è l'insieme delle soluzioni di $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ (utile per trovare una base).

Più vettori

Se $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ e $f_{v_i}(v) = v \cdot v_i$,

$$\begin{aligned}
\langle v_1, \ldots, v_r\rangle^\perp &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v_1, w\rangle = \cdots = \langle v_r, w\rangle = 0\} \\
&= \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r) \,.\, \langle v, w\rangle = 0\} \quad (*) \\
&= \ker(f_{v_1}) \cap \cdots \cap \ker(f_{v_r})
\end{aligned}$$

Ovvero se $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{r_1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = 0
\end{cases}$$

$(*)$ Questa definizione è valida perché se $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$, allora:

$$\langle v, w\rangle = \alpha_1\langle v_1, w\rangle + \cdots + \alpha_r\langle v_r, v\rangle,$$

quindi se v è perpendicolare a $v_1, \ldots, v_r$ tutti i prodotti scalari valgono 0 e anche $\langle v, w\rangle = 0$.

Interpretazione geometrica

k-piano passante per l'origine e perpendicolare a $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r)$.