Spazi vettoriali

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme V, i cui elementi sono detti vettori, dotato di due operazioni:

somma $V \times V \to V$ $(v, w) \mapsto v + w$

prodotto per scalare $\mathbb{K} \times V \to V$ $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$

che soddisfano:

(1.1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associatività)
(1.2) $v + w = w + v$ (commutatività)
(1.3) $\exists 0_V \in V \,.\, v + 0_V = v$ (vettore nullo)
(1.4) $\exists -v \in V \,.\, v + (-v) = 0_V$ (opposto di v)

(2.1) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
(2.2) $1v = v$

(3.1) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributività di V su $\mathbb{K}$)
(3.2) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ (distributività di $\mathbb{K}$ su V)

Da queste seguono alcune proprietà:

(a) il vettore nullo è unico:

$$0'_V \overset{(1.3)}{=} 0'_V + 0_V \overset{(1.3)}{=} 0_V$$

(b) l'opposto di v è unico:

$$\begin{aligned}(-v)' &\overset{(1.3)}{=} (-v)' + 0_V \overset{(1.4)}{=} (-v)' + (v + (-v)) \\ &\overset{(1.1)}{=} ((-v)' + v) + (-v) \overset{(1.4)}{=} 0_V + (-v) \\ &\overset{(1.3)}{=} (-v)\end{aligned}$$

(c) $0v = 0_V$:

$$\begin{aligned}0v &= (0 + 0)v \\ &= 0v + 0v \\ 0v + (-(0v)) &= 0v + 0v + (-(0v)) \\ 0_V &= 0v + 0_V = 0v\end{aligned}$$

(d) $(-1)v = -v$:

$$0_V = 0v = (1 - 1)v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$$

Esempi di campi: $\mathbb{R}^n$, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ (matrici $n \times m$ a coefficienti reali), $\mathbb{R}[x]$ (polinomi a coefficienti reali nella variabile x), $\mathbb{R}^X$ (con $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $0(x) = 0$) (dimostrare).