Determinante e mosse di Gauss

- Se A' è ottenuta scambiando righe di A, $\det(A') = -\det(A)$;
- se A' è ottenuta moltiplicando una riga di A per λ, $\det(A') = \lambda \det(A)$;
- se A' è ottenuta aggiungendo ad una riga di A il multiplo di un'altra, $\det(A') = \det(A)$.

In particolare, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Dimostrazione

Induzione:

$n = 2$ si verifica con la formula $ad - bc$;

$n > 2$ c'è sempre una riga A_i che non è coinvolta nella mossa, rispetto a cui sviluppiamo il determinante:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$\det(A') = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$$

La matrice C'_{ij} si ottiene tramite una mossa di Gauss da C_{ij} ed ha dimensione $(n-1) \times (n-1)$, quindi per ipotesi induttiva

$$\det(C'_{ij}) = -\det(C_{ij}),\ \lambda \det(C_{ij}) \text{ o } \det(C_{ij})$$

a seconda del tipo di mossa. Raccogliendo -1, λ o niente dalla sommatoria si ricava la stessa relazione tra $\det(A')$ e $\det(A)$.