# Base ortonormale

Ogni sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale.

## Dimostrazione

Per induzione su $\dim(V)$:

**$\dim(V) = 0$ e $\dim(V) = 1$:** ovvio;

**$\dim(V) = m$:** sia $v \in V \neq 0$ e $f_v(w) = v \cdot w$. Dal momento che $v \neq 0$, $\mathrm{Im}(f_v) = \mathbb{R}$, e poiché $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f_v)) + \dim(\ker(f_v))$ e $\ker(f_v) = \langle v \rangle^\perp$, otteniamo che $\dim(\langle v \rangle^\perp) = m - 1$. Per ipotesi induttiva, $\langle v \rangle^\perp$ ammette una base ortonormale $v_2, \ldots, v_m$. Sia $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$, allora $v_1, \ldots, v_m$ è una base ortonormale di $V$. Infatti:

- $\|v_1\| = 1$;
- $\forall i \in \{2, \ldots, m\} \, . \, \langle v_1, v_i \rangle = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v\|} = 0$ perché $v_i \in \langle v \rangle^\perp$;
- per i punti precedenti $v_1, \ldots, v_m$ è un sistema ortonormale, e in quanto tale è linearmente indipendente. Dal momento che contiene $\dim(V)$ vettori appartenenti a $V$ è una base di $V$.