Rango

Il rango della matrice $m \times n$ A è

$$\operatorname{rk}(A) = \dim(\operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n)) = \dim(\operatorname{Span}(A_1, \dots, A_n))$$

ovvero il numero massimo di colonne/righe linearmente indipendenti di A.

Applicando mosse di Gauss il rango non cambia. Sia A' una qualunque riduzione a scalini di A: $\operatorname{rk}(A)$ è il numero di pivot in A'.

Dimostrazione (solo colonne)

Rango dopo mosse di Gauss

Sia $c_1, \dots, c_r$ un qualsiasi sottoinsieme delle colonne di A. L'insieme è linearmente indipendente se e solo se

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_r c_r = 0 \quad (*)$$

ha una sola soluzione. Applicando mosse di Gauss ad A si modifica allo stesso modo la matrice associata al sistema $*$, ma dal momento che questo non cambia le soluzioni di $*$, non cambia nemmeno la dipendenza di $c_1, \dots, c_n$. Il numero massimo di colonne linearmente indipendenti rimane quindi invariato.

Rango = #pivot

Sia A' una riduzione a scalini e A'' il risultato dell'algoritmo di Gauss-Jordan. $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A') = \operatorname{rk}(A'')$. A'' è della forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}
1 & 0 & 0 & \dots & a_1 & \dots \\
0 & 1 & 0 & & \vdots & \\
\vdots & 0 & 1 & & & \\
 & \vdots & 0 & \ddots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_m & \dots
\end{array}\right)$$

Le colonne a sinistra della linea sono #pivot e linearmente indipendenti, quelle a destra sono combinazione lineare delle altre.