Unione e intersezione di sottospazi

Dato V spazio vettoriale e $U, W \subseteq V$ sottospazi, $U \cap W$ è un sottospazio, mentre $U \cup W$ lo è se e solo se $U \subseteq W$ (o viceversa).

Dimostrazione

intersezione

(i) $v \in U \cap W \implies v \in U \wedge v \in W \implies \alpha v \in U \wedge \alpha v \in W \implies \alpha v \in U \cap W$

(ii) $v, w \in U \cap W \implies v + w \in U \wedge v + w \in W \implies v + w \in U \cap W$;

(iii) $0_V \in U \wedge 0_V \in W \implies 0_V \in U \cap W$.

unione sia $u \in U$, $u \notin W$, $w \in W$, $w \notin U$. $U \cup W$ contiene u e w ma non $u + w$ (perché non è contenuto né in U né in W), quindi non è un sottospazio. Se invece uno è sottoinsieme dell'altro, $u + w \in U \cup W$.