Determinante, kernel, immagine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(v) = Av$. Allora:

$$\ker(f) \neq 0 \iff \mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^n \iff \det(A) = 0.$$

Questo segue dal fatto che $\det(A) = 0 \iff$ le colonne sono dipendenti.

Possiamo estendere il teorema a una qualsiasi applicazione lineare $f : V \to V$. Siano B e B' due basi di V, A la matrice di f rispetto a B e A' quella rispetto a B'. Allora $\det(A) = \det(A')$ (il determinante non dipende dalla base).

Quindi se A è la matrice associata a f rispetto ad una qualsiasi base,

$$\ker(f) \neq 0 \iff \mathrm{Im}(f) \neq V \iff \det(A) = 0.$$

Questo in realtà vale per tutte le $f : U \to V$ con $\dim(U) = \dim(V)$, e implica che:

$$\det(A) \neq 0 \iff f \text{ isomorfismo} \iff A \text{ invertibile}$$

Dimostrazione

Usando la matrice di cambiamento di base P, $A' = PAP^{-1}$:

$$\det(A') = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A)\frac{\det(P)}{\det(P)} = \det(A).$$