Sottospazio ortogonale ad uno spazio vettoriale

Dato lo spazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in V \ . \ v \cdot w = 0\}.$$

Vale che $V \cap V^\perp = \{0\}$, $\mathrm{Span}(V, V^\perp) = \mathbb{R}^n$ e $\dim(V) + \dim(V^\perp) = n$.

Dimostrazione

Se $v \in V \cap V^\perp$, $v \cdot v = 0$ quindi $v = 0$.
Sia $v_1, \ldots, v_r$ una base ortonormale di V. Allora $V^\perp = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^\perp$, che ha dimensione $n-r$, quindi $\dim(V)+\dim(V^\perp) = n$. Poiché sono in somma diretta, il loro sottospazio generato ha dimensione n, quindi è $\mathbb{R}^n$.