Prodotto scalare e matrici simmetriche

Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, per ogni $v, c \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle.$$

Dimostrazione

Siano $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ simmetrica, $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Allora:

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \cdots + a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \langle Av, w\rangle &= (a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n)c_1 + \cdots + (a_{n1}b_1 + \cdots + a_{nn}b_n)c_n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_jc_i. \end{aligned}$$

Allo stesso modo si vede che:

$$\langle v, Aw\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_ic_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}b_jc_i,$$

ma dal momento che $a_{ij} = a_{ji}$ i due sono uguali.