Sistema omogeneo associato

Dato il sistema lineare (SL) con $C = (A \mid b)$, il sistema omogeneo associato a (SL) è il sistema lineare (SL_{om}) con matrice completa $(A \mid 0)$.

$0_{\mathbb{R}^n}$ è soluzione di un sistema lineare se e solo se il sistema è omogeneo.

Se $\overline{x}, \overline{y} \in S$, allora $\overline{x} - \overline{y} \in S_{om}$. Infatti,

$$A\overline{x} = b \quad A\overline{y} = b \qquad A(\overline{x} - \overline{y}) = A\overline{x} - A\overline{y} = b - b = 0.$$

Segue che $S = \{\overline{x} + v \mid v \in S_{om}\} = \overline{x} + S_{om}$:

- $S \subseteq \overline{x} + S_{om}$: $\forall x \in S \,.\, x = \overline{x} + x - \overline{x} \implies x \in \overline{x} + S_{om}$
  perché $x - \overline{x} \in S_{om}$ per il lemma precedente;

- $\overline{x} + S_{om} \subseteq S$: $\forall x \in \overline{x} + S_{om} \,.\, \exists v \in S_{om} \,.\, x = \overline{x} + v$,
  quindi $Av = 0$ e $v = x - \overline{x}$, e
  $0 = A(x - \overline{x}) = Ax - A\overline{x} \quad Ax = A\overline{x} = b \quad x \in S$.