Teorema spettrale

Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, ogni autovalore di A è reale ed A è diagonalizzabile in una base ortonormale di autovettori.

Dimostrazione

Autovalori reali

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di A e v un suo autovettore associato. $Av = \lambda v$ e A è simmetrica, quindi

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle,$$

ovvero $\lambda = \overline{\lambda}$, che è vero solo se $\lambda \in \mathbb{R}$.

Base ortonormale di autovettori

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A e v un suo autovettore associato. Supponiamo senza perdità di generalità che $\|v\| = 1$ (infatti se v è autovettore anche $v/\|v\|$ lo è). Procediamo per induzione sulla dimensione del dominio:

caso base $n = 1$**:** v è base ortonormale;

passo induttivo $n > 1$**:** sia $V = \langle v\rangle^{\perp}$. osserviamo che $\forall w \in V\ .\ Aw \in V$. Infatti, visto che A è simmetrica,

$$\langle v, Aw\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = 0.$$

$w \mapsto Aw$ è quindi un'applicazione lineare $V \to V$ definita da una matrice simmetrica, ed essendo $\dim(V) = n - 1$ allora per ipotesi induttiva V ammette una base ortonormale di autovettori $v_2, \ldots, v_n$, e $v, v_2, \ldots, v_n$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di A.