Sottospazi vettoriali

Dato lo spazio vettoriale V, $W \subseteq V$ *non vuoto* si dice sottospazio di V se:

(i) $\forall w, u \in W \,.\, w + u \in W$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, w \in W \,.\, \alpha w \in W$;

(iii) $0 \in W$, equivalente ad imporre che $W \neq \varnothing$.

W è uno spazio vettoriale con le stesse operazioni di V:

- (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (3.1), (3.2) valgono perché valgono in V;
- (1.3) perché $0_V \stackrel{(c)}{=} 0w \stackrel{(ii)}{\in} W$;
- (1.4) perché $-w \stackrel{(d)}{=} (-1)w \stackrel{(ii)}{\in} W$.

Si può sempre definire il sottospazio *banale* $W = 0_V$ e quello *totale* $W = V$.