Matrici associate ad applicazioni lineari

Siano V e W spazi vettoriali con basi $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \dots, w_m\}$, e $f : V \to W$ lineare. La matrice associata a f rispetto a B e C è

$$M_{BC}(f) = (a_{ij})$$

dove

$$\forall i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\ .\ a_{ij} = \text{coordinata } i\text{-esima di } f(v_j),$$

ovvero la colonna j-esima di $M_{BC}(f)$ è la m-upla delle coordinate di $f(v_j)$ rispetto a C.

Se $f(x) = Ax$, allora la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ è A ($f(e_i) = A^i$). Dal momento che si possono ricondurre applicazioni lineari tra spazi vettoriali arbitrari ad applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la matrice associata descrive in generale tutti i valori di una qualsiasi applicazione lineare.

Il prodotto di $M_{BC}(f)$ per le coordinate rispetto a B di v ha come risultato le coordinate rispetto a C di $f(v)$.

Dimostrazione

Siano f, B e C come sopra, e $A = M_{BC}(f)$. Indichiamo con $[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le coordinate di v rispetto alla base B. Allora:

$$\begin{aligned}[f(v)]_C &= [\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)]_C = \alpha_1 [f(v_1)]_C + \cdots + \alpha_n [f(v_n)]_C \\ &= \alpha_1 A^1 + \cdots + \alpha_n A^n = A[v]_B.\end{aligned}$$