Basi e applicazioni lineari

Se V e W sono spazi vetoriali di dimensione finita e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V,

$$\forall w_1, \dots, w_n \in W \ \exists! f : V \to W \text{ lineare } . \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \ . \ f(v_i) = w_i$$

Dimostrazione

esiste: Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le coordinate di v rispetto a B. Definiamo

$$f(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

f è lineare per il lemma sulle coordinate della somma di vettori.

è unica: sia $g : V \to W$ lineare tale che $g(v_i) = w_i$ per ogni i tra 1 e n.

$$g(v) = g(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 g(v_1) + \cdots + \alpha_n g(v_n) = f(v)$$