Matrici associate a trasformazioni geometriche

Riflessione rispetto all'origine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando la matrice con sé stessa si ottiene $I_{2\times 2}$.

Riflessione rispetto all'asse x

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Proiezione sull'asse x

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Non è un isomorfismo, infatti $\ker = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix} \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \neq 0$.

Rotazione di un angolo α attorno all'origine

Definiamo il valore della trasformazione per i vettori della base canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$