Coordinate rispetto ad una base ortonormale

Se $v_1, \dots, v_n$ è una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad . \quad v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

Ovvero l'i-esima coordinata di v è $v \cdot v_i$.

Dimostrazione

Dal momento che $v_1, \dots, v_n$ è una base, $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n \ . \ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Ma allora:

$$v \cdot v_i = (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \cdot v_i = \alpha_1 (v_1 \cdot v_i) + \dots + \alpha_n (v_n \cdot v_i) = \alpha_i$$

perché $v_j \cdot v_i$ vale 0 per $i \neq j$ e 1 altrimenti.