Autovalori e sottospazi

Dato uno spazio vettoriale V, un'applicazione lineare $f : V \to V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, gli autovettori di λ definiscono un *autospazio* di V:

$$V_\lambda = \{v \mid f(v) = \lambda v\} \cup \{0_V\}.$$

V_λ è un sottospazio di V.

- Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$;
- $\dim(V_\lambda) \geq 1$, perché se v è autovettore per λ anche αv lo è.

Dimostrazione

Se v_1 e v_2 sono autovettori di λ,

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \\ f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha \lambda v_1 = \lambda(\alpha v_1), \end{aligned}$$

quindi V_λ è sottospazio. Inoltre, poiché v non può essere autovettore di due autovalori diversi, vale anche la seconda proposizione.