Vettori (e sistemi) ortogonali

$v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0$.

$v_1, \dots, v_r$ è un *sistema ortogonale* se non contiene vettori nulli e $\forall i \neq j \ . \ v_i \cdot v_j = 0$, è un *sistema ortonormale* se vale anche che $\forall i \ . \ v_i \cdot v_i = 1$. Un sistema ortogonale è linearmente indipendente.

Dimostrazione

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0.$$

Applichiamo il prodotto scalare per v_1 ad entrambi i membri:

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) \cdot v = 0 \cdot v,$$

che per la linearità del prodotto scalare vale

$$\alpha_1 (v_1 \cdot v_1) + \cdots + \alpha_r (v_r \cdot v_1) = 0.$$

Essendo $v_1 \cdot v_1 \neq 0$ (perché $v_1 \neq 0$) e $v_i \cdot v_1 = 0$, allora $\alpha_1 = 0$. Si ripete l'operazione per concludere che $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.