Estrazione di una base

Se v è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$, allora $\text{Span}(v_1, \dots, v_k, v) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$:

$$\begin{aligned} w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k, v) &\iff \\ w &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \\ &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \beta v + \beta(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \\ &= (\beta_1 + \beta\alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_k + \beta\alpha_k) v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Segue che esiste sempre un sottoinsieme B di $v_1, \dots, v_k$ tale per cui $\text{Span}(B) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ e tutti i vettori in S sono linearmente indipendenti (ovvero B è una base di $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$).