# Ricerca di una base ortonormale

Algoritmo di Gram-Schmidt: se $v_1, \dots, v_n$ è una base di $V$, troviamo la base ortonormale $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n$ scegliendo $\overline{v}_i$ in modo che sia ortonormale a $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_{i-1}$.

**caso base $\overline{v}_1$:** non ci sono ancora altri vettori nella base ortonormale, quindi è sufficiente rendere $v_1$ unitario:

$$\overline{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

**passo induttivo $\overline{v}_i$:** si trova la direzione di $\overline{v}_i$ sottraendo a $v_i$ il risultato della sua proiezione su ciascuno dei vettori già trovati della base ortonormale:

$$v_i' = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} (v_i \cdot \overline{v}_j)\overline{v}_j \qquad \overline{v}_i = \frac{v_i'}{\|v_i'\|}$$

## Dimostrazione

Verifichiamo che $v_i'$ è ortogonale a $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_{i-1}$:

$$\begin{aligned}
v_i' \cdot \overline{v}_j &= (v_i - (v_i \cdot \overline{v}_1)\overline{v}_1 - \dots - (v_i \cdot \overline{v}_{i-1})\overline{v}_{i-1}) \cdot v_j \\
&= v_i \cdot \overline{v}_j - (v_i \cdot \overline{v}_1) \underbrace{(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_j)}_{0} - \dots - (v_i \cdot \overline{v}_j) \underbrace{(\overline{v}_j \cdot \overline{v}_j)}_{1} - \dots - (v_i \cdot \overline{v}_{i-1}) \underbrace{(\overline{v}_{i-1} \cdot \overline{v}_j)}_{0} \\
&= v_i \cdot \overline{v}_j - v_i \cdot \overline{v}_j = 0
\end{aligned}$$

$\overline{v}_i$ è unitario ed ha la stessa direzione di $v_i'$, quindi $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_i$ è un sistema ortonormale. In quanto tale è linearmente indipendente, quindi se $i = n$ i vettori formano una base di $V$.