Isomorfismo (applicazioni lineari)

Un'applicazione lineare $f : V \to U$ è un isomorfismo se $\text{Im}(f) = U$ e $\forall v, v' \in V \,.\, f(v) = f(v') \iff v = v'$, ovvero se f è biunivoca.
Segue che f è un isomorfismo se e solo se $\text{Im}(f) = U$ e $\ker(f) = \{0_V\}$, perché $v - v' \in \ker(f) \iff f(v_1) = f(v')$.

Dato un isomorfismo $f : V \to U$, si può definire il suo inverso $f^{-1} : U \to V$, che è a sua volta un isomorfismo. Si dimostra osservando che:

$$\begin{aligned} f^{-1}(v+u) = f^{-1}(v) + f^{-1}(u) &\iff f(f^{-1}(v) + f^{-1}(u)) = v + u \\ &\iff f(f^{-1}(v)) + f(f^{-1}(u)) = v + u \\ &\iff v + u = v + u \end{aligned}$$

Analogamente vale che $f^{-1}(\alpha v) = \alpha f^{-1}(v)$.

Due spazi sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.