Autovettori e indipendenza lineare (e corollari)

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono autovalori distinti di $f : V \to V$ e v_i è un vettore associato a λ_i, allora $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Corollari

1. ci sono un numero finito di autovalori distinti (perché $\dim V < \infty$);
2. f è diagonalizzabile $\iff \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_n}) = \dim(V)$;
3. $n = \dim(V) \implies f$ diagonalizzabile. Non vale il contrario, per esempio id è diagonalizzabile ma ha un unico autovalore (1).

Dimostrazione

Dimostriamo $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_n = 0$ per induzione:

$n = 1$ ovvio;

$n + 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n+1} v_{n+1} \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_{n+1} f(v_{n+1}) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1}, \end{aligned}$$

inoltre

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} v_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0,$$

quindi:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) v_1 + \cdots + \alpha_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}) v_{n+1} = 0$$

e poiché $v_1, \ldots, v_n$ sono indipendenti per ipotesi induttiva,

$$\alpha_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0$$

che è vero solo se $\alpha_i = 0$, visto che gli autovalori sono distinti. $v_{n+i} \neq 0$ quindi anche $\alpha_{n+1} = 0$.

Del secondo corollario: consideriamo una base B_i dell'autospazio V_{λ_i}. $B = \bigcup_i B_i$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti per il teorema sopra, e dal momento che f è diagonalizzabile se e solo se ammette una base di autovettori, è diagonalizzabile se e solo se $|B| = \dim(V)$.