Bellman-Ford (ricerca operativa)

L'algoritmo di Bellman-Ford trova un albero ottimo (se esiste) anche nel caso in cui nel grafo ci siano archi di costo negativo.

Ad ogni iterazione k l'algoritmo mantiene:

- un albero di copertura radicato in r e orientato (memorizzato in un vettore p di predecessori)
- un vettore π^k di etichette associate ai nodi (che non è necessariamente uguale al vettore dei potenziali dei nodi associato all'albero)

Algoritmo

0. Inizializza $p_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = r \\ -1 & \text{se } i \neq r \end{cases}$ $\quad \pi_i^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } i = r \\ +\infty & \text{se } i \neq r \end{cases}$ $\quad k = 1$

(l'albero inizialmente è costituito solo da archi fittizi da r agli altri nodi)

1. (Aggiorniamo le etichette di tutti i nodi)
Per ogni nodo $j \in N$:
trova $u = \arg \min_{i \in BS(j)} \{\pi_i^{k-1} + c_{ij}\}$
$[BS(j) = \{i \in N : \text{ esiste un arco } (i,j) \in A\}$ è la stella entrante in $j]$

se $\pi_j^{k-1} > \pi_u^{k-1} + c_{uj}$ allora $p_j = u$, $\pi_j^k = \pi_u^{k-1} + c_{uj}$
altrimenti $\pi_j^k = \pi_j^{k-1}$

2. Se $\pi^k = \pi^{k-1}$ allora stop (p fornisce un albero ottimo)

3. Se $k = |N|$ allora stop (p fornisce un ciclo orientato di costo negativo)
altrimenti $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Teorema
L'algoritmo di Bellman-Ford trova un albero dei cammini minimi oppure un ciclo orientato di costo negativo dopo al più $|N|$ iterazioni.

Dimostrazione (sketch)

- Per ogni nodo j l'etichetta π_j^k è uguale al costo del cammino minimo da r a j che contiene al più k archi.
- Se ad una iterazione $k \leq |N|$ le etichette dei nodi non sono state modificate ($\pi^k = \pi^{k-1}$), allora rimarranno costanti in tutte le iterazioni successive, quindi π_j^k è il costo del cammino minimo da r a j senza limitazioni sul numero di archi e p fornisce un albero ottimo.
- Se all'iterazione $|N|$ viene modificata l'etichetta di un nodo j, allora è stato trovato un nuovo cammino da r a j contenente $|N|$ archi (cioè passante due volte su uno stesso nodo) di costo inferiore rispetto a tutti i cammini semplici da r a j. Pertanto non può esistere un cammino minimo da r a j, mentre nel nuovo cammino trovato esiste un ciclo di costo negativo che può essere ricavato dal vettore p.

$\square$