Problema del commesso viaggiatore

Dato un grafo completo (N, A) con c_{ij} costo dell'arco (i, j), trovare un ciclo hamiltoniano (passa su tutti i nodi esattamente una volta) di costo minimo.

Se la matrice dei costi è simmetrica ($\forall i, j \ . \ c_{ij} = c_{ji}$) il problema è detto simmetrico; consideriamo solo questo caso, quindi possiamo supporre che il grafo non sia orientato.

È un problema NP-hard, e su un grafo completo ci sono $(n-1)!$ cicli hamiltoniani (la metà se è simmetrico).

Modello 1

$x_{ij} = 1$ se scegliamo l'arco (i, j), 0 altrimenti.

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{\substack{j \in N \\ j > i}} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum\limits_{\substack{j \in N \\ j > k}} x_{kj} + \sum\limits_{\substack{i \in N \\ i < k}} x_{ik} = 2 & \forall k \in N \\ \sum\limits_{i \in S} \sum\limits_{\substack{j \notin S \\ j > i}} x_{ij} + \sum\limits_{i \notin S} \sum\limits_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N, |S| \geq 1 \end{cases}$$

Il primo vincolo impone che ci siano esattamente due archi incidenti su ogni nodo, il secondo impedisce la creazione di sottocicli imponendo connessione (stesso vincolo nell'albero di copertura di coso minimo).

Modello 2

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{\substack{j \in N \\ j > i}} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum\limits_{\substack{j \in N \\ j > k}} x_{kj} + \sum\limits_{\substack{i \in N \\ i < k}} x_{ik} = 2 & \forall k \in N \\ \sum\limits_{i \in S} \sum\limits_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} \leq |S| - 1 & \forall S \subset N, |S| \geq 3 \end{cases}$$

Il secondo vincolo impedisce la creazione di sottocicli imponendo un limite massimo al numero di archi.