Problema duale (PL)

Dato il problema *primale* di PL

$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \end{cases}$$

il suo *duale* sarà:

$$\begin{cases} \min y \cdot b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^{\mathsf{t}} A = c^{\mathsf{t}}, y \geq 0\} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \min y \cdot b \\ y^{\mathsf{t}} A = c^{\mathsf{t}} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

dove il secondo vincolo può essere scritto equivalentemente come $A^{\mathsf{t}} y = c$.

	primale	**duale**
obiettivo	max	min
variabili	n	m
vincoli	m	n

Teorema: il duale del duale di $\mathcal{P}$ è equivalente a $\mathcal{P}$.

Interpretazione

Supponiamo di avere il problema:

$$\begin{cases} \max 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9 \end{cases}$$

allora possiamo utilizzare combinazioni coniche dei vincoli per stabilire un limite superiore alla soluzione, se i coefficienti delle variabili nella disequazione risultante sono maggiori o uguali a quelli della funzione obiettivo.

Nel problema duale scegliamo i coefficienti $y_1, y_2 \geq 0$ della combinazione conica in modo da avere esattamente gli stessi coefficienti della funzione obiettivo ($y^{\mathsf{t}} A = c^{\mathsf{t}}$):

$$\begin{array}{cccccccccc} y_1 & (& x_1 & - & x_2 & - & x_3 &) & \leq & 1 \cdot y_1 & + \\ y_2 & (& 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 &) & \leq & 9 \cdot y_2 & = \\ \hline & & 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \leq & y \cdot b & \end{array}$$

minimizziamo l'upper bound per trovare la soluzione ottima del primale.