Algoritmo del simplesso duale

Anziché muoversi da un vertice all'altro del primale, facciamo lo stesso nel duale.

1. troviamo una base B tale che la soluzione di base duale

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_B \\ \overline{y}_N \end{pmatrix}$$

   sia ammissibile;

2. calcoliamo la soluzione di base primale $\overline{x} = A_B^{-1} b_B$;

3. se $A_N \overline{x} \leq b_N$ allora stop ($\overline{x}$ e $\overline{y}$ ottimi), altrimenti troviamo l'indice *entrante*

$$k = \min\{i \in N \mid A_i \overline{x} > b_i\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)}$$

   e definiamo $\eta_B = A_k A_B^{-1}$ – la direzione di spostamento è

$$d_i = \begin{cases} -\eta_i & \text{se } i \in B \\ 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{k\} \end{cases},$$

   che è di decrescita per il duale.

4. se $\eta_B \leq 0$ allora stop (direzione di recessione e decrescita, primale vuoto, ottimo duale $-\infty$), altrimenti calcoliamo

$$\theta = \min\left\{ \frac{\overline{y}_i}{\eta_i} \,\middle|\, i \in B, \eta_i > 0 \right\} \qquad \text{(passo di spostamento)}$$

   e l'indice *uscente*

$$h = \min\left\{ i \in B \,\middle|\, \eta_i > 0, \frac{\overline{y}_i}{\eta_i} = \theta \right\}, \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)}$$

   aggiorniamo la base $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, calcoliamo $\overline{y}_B^{\mathsf{t}} = c^{\mathsf{t}} A_B^{-1}$ e torniamo al passo 2.

Nell'algoritmo del simplesso primale calcoliamo prima l'indice uscente e determiniamo θ considerando gli indici non in base, nell'algoritmo duale il contrario.

Teorema: l'algoritmo termina dopo un numero finito di iterazioni, trovando o un vertice ottimo o una direzione di recessione che è di decrescita.

Geometricamente

Data la base $B = i, j$,

- $\overline{x}$ è ammissibile se è nel poliedro del primale;
- $y_B^{\mathsf{t}} = c^{\mathsf{t}} A_B^{-1} \implies c = y_i A_i + y_j A_j$, quindi si può determinare esattamente il valore di y_B in casi particolari;
- $\eta_B = A_k A_B^{-1} \implies A_k = \eta_i A_i + \eta_j A_j$, ovvero possiamo stabilire il segno delle componenti di η_B (η_i negativo quando bisogna invertire A_i per far stare A_k in cono$\{A_i, A_j\}$).