Algoritmo del simplesso primale: vertice iniziale

Come si trova una soluzione di base ammissibile per il problema di PL $\mathcal{P}$? Data una base B con $\overline{x} = A_B^{-1} b_B$ non ammissibile, definiamo:

$$U = \{i \in N \mid A_i \overline{x} \leq b_i\} \qquad V = \{i \in N \mid A_i \overline{x} > b_i\}$$

e costruiamo il problema *ausiliario* primale:

$$\begin{cases} \max\limits_{(x,\varepsilon)} - \sum\limits_{i \in V} \varepsilon_i \\ A_i x \leq b_i & \forall i \in B \cup U \\ A_i x - \varepsilon_i \leq b_i & \forall i \in V \\ -\varepsilon_i \leq 0 & \forall i \in V \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{\text{aux}})$$

Possiamo trovare facilmente una soluzione ammissibile di $(\mathcal{P}_{\text{aux}})$:

$$(\overline{x}, \overline{\varepsilon}) \qquad \text{con} \quad \overline{\varepsilon} = A_V \overline{x} - b_V \geq 0$$

relativa a $B \cup V$, con matrice di base uguale a:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_B & 0 \\ \hline A_V & -I \end{array}\right)$$

$\overline{\varepsilon}$ è l'opposto dello scarto di $\overline{x}$ rispetto ai vincoli non rispettati (quindi li rende attivi).

- se il valore ottimo di $(\mathcal{P}_{\text{aux}})$ è negativo, allora $(\mathcal{P})$ non ha soluzioni ammissibili;
- se è 0, allora si può costruire una soluzione di base ammissibile per $(\mathcal{P})$ a partire da una ottima per $(\mathcal{P}_{\text{aux}})$.

Se $v(\mathcal{P}_{\text{aux}}) \neq 0$, allora non ci sono soluzioni ammissibili per $\varepsilon = 0$, quindi $Ax = b$ non ha soluzione. Non è possibile che $v(\mathcal{P}_{\text{aux}} > 0)$.