Teorema degli scarti complementari

Supponiamo che $\overline{x}$ sia la soluzione ammissibile del problema primale

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max c \cdot x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

allora $\overline{x}$ è ottima se e solo se esite una soluzione $\overline{y}$ del sistema:

$$\begin{cases} y^{\mathsf{t}} A = c^{\mathsf{t}} & \text{(ammissibilità} \\ y \geq 0 & \quad\quad \text{per il duale)} \\ y \cdot (b - A\overline{x}) = 0 & (\overline{x} \text{ e } \overline{y} \text{ sono in scarti complementari)} \end{cases}$$

e $\overline{y}$ è soluzione ottima del problema duale.

Questa condizione equivale a dire che $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ammissibili, e per ogni vincolo del primale il vincolo è attivo o la componente corrispondente di $\overline{y}$ è 0 (i prodotti membro a membro non possono essere negativi).

Vale anche che $\overline{y}$ è ottima per il duale se e solo se esiste una soluzione $\overline{x}$ del sistema:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ \overline{y} \cdot (b - Ax) = 0 \end{cases}$$

e $\overline{x}$ è soluzione ottima del primale.

Dimostrazione

Per il teorema di dualità forte $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ottime se e solo se hanno lo stesso valore, e

$$\underbrace{c^{\mathsf{t}}}_{\overline{y}^{\mathsf{t}} A} \overline{x} = \overline{y}^{\mathsf{t}} b \iff \overline{y}^{\mathsf{t}} (b - A\overline{x}) = 0$$