Teorema di dualità debole

Dato il problema:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max c \cdot x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \end{cases}$$

in cui la regione ammissibile è $P \neq \varnothing$, e il suo duale

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \min y \cdot b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^{\mathsf{t}} A = c^{\mathsf{t}}, y \geq 0\} \end{cases}$$

allora, se $x \in P$ e $y \in D$:

$$c \cdot x \leq y \cdot b,$$

quindi:

$$v(\mathcal{P}) \leq v(\mathcal{D})$$

Dimostrazione

Visto che $y^{\mathsf{t}} A = c^{\mathsf{t}}$,

$$c \cdot x = c^{\mathsf{t}} x = y^{\mathsf{t}} A x,$$

ma $Ax \leq b$ e $y \geq 0$, quindi:

$$c \cdot x = y^{\mathsf{t}} A x \leq y^{\mathsf{t}} b = y \cdot b.$$