

Forma generale e canonica (PL)

forma generale un problema di programmazione lineare consiste nel trovare il massimo o minimo di una funzione lineare di n variabili soggette a vincoli lineari di uguaglianza o disuguaglianza:

$$\begin{cases} \max / \min c \cdot x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

forma canonica

$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Equivalenza

Possiamo scrivere ciascun problema di PL in forma canonica:

- $\min c \cdot x$ è equivalente a $-\max -(c \cdot x)$
- $a \cdot x \geq b$ è equivalente a $-a \cdot x \leq -b$
- $a \cdot x = b$ è equivalente a $\begin{cases} a \cdot x \leq b \\ -a \cdot x \leq -b \end{cases}$

Altre conversioni

variabili non negative visto che $\forall x \in \mathbb{R} . x = x^+ - x^-$, sostituiamo ogni variabile x_i che non ha un vincolo di non negatività con $x'_i - x''_i$, e imponiamo che $x', x'' \geq 0$:

$$\begin{aligned} x &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \\ A &\longleftrightarrow (A \mid -A) \\ c &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

esempio:

$$\begin{cases} \max 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \max 2x'_1 - 2x''_1 - 3x'_2 + 3x''_2 \\ x'_1 - x''_1 + x'_2 - x''_2 \leq 7 \\ x'_1 - x''_1 - 2x'_2 + 2x''_2 \leq 4 \\ x'_1, x''_1, x'_2, x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

vincoli di uguaglianza aggiungere variabili di scarto per trasformare i vincoli \leq in $=$:

$$Ax \leq b \longleftrightarrow (A \mid I) \begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix} = b,$$

per esempio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 21 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_4 = 35 \end{cases}$$