Algoritmo del simplesso primale

Consideriamo il problema primale:

$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \end{cases}$$

in cui $\operatorname{rk} A = n$, e quindi esistono vertici (soluzioni di base ammissibili) di P. Se così non è possiamo imporre senza perdita di generalità che $x \geq 0$.

Ci spostiamo tra i vertici finché non ne troviamo uno ottimo:

1. troviamo una base B tale che la soluzione di base primale $\overline{x} = A_B^{-1} b_B$ sia ammissibile (quindi un vertice di P);
2. calcoliamo la soluzione di base duale $\overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_B \\ \overline{y}_N \end{pmatrix}$;
3. se $\overline{y}_B \geq 0$ (o $c \in \operatorname{cono}\{A_i \mid i \in B\}$) allora stop ($\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ottime per primale e duale rispettivamente), altrimenti trova l'*indice uscente*

   $$h = \min\{i \in B \mid \overline{y}_i < 0\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)},$$

   e definiamo $W = -A_B^{-1}$ – la direzione di spostamento W^h è una direzione di crescita (prendiamo la colonna associata all'indice h in base alla riga di A da cui viene, non l'h-esima colonna di W);
4. se $\forall i \in N \; . \; A_i W^h \leq 0$ allora stop (direzione di recessione e di crescita, ottimo primale $+\infty$ e duale senza soluzione), altrimenti calcoliamo

   $$\theta = \min\left\{ \frac{b_i - A_i\overline{x}}{A_i W^h} \;\middle|\; i \in N,\ A_i W^h > 0 \right\} \qquad \text{(passo di spostamento)}$$

   e troviamo l'*indice entrante*

   $$k = \min\left\{ i \in N \;\middle|\; A_i W^h > 0,\ \frac{b_i - A_i\overline{x}}{A_i W^h} = \theta \right\} \qquad \text{(regola anticiclo di Bland)}$$

   Aggiorniamo la base $B = (B \setminus \{h\}) \cup \{k\}$, calcoliamo $\overline{x} = A_B^{-1} b_B$ e torniamo al passo 2 ($\overline{x}$ è ammissibile).

Il passo di spostamento potrebbe essere 0 se $\overline{x}$ è degenere: cambiamo base ma $\overline{x}$ rimane costante. Non si crea un ciclo (non ritorniamo a una base già vista di un vertice degenere) per la regola anticiclo (che se non ci sono vertici degeneri non serve).

Teorema: l'algoritmo termina dopo un numero finito di iterazioni, trovando o un vertice ottimo o una direzione di recessione che è di crescita.

Trova una sola soluzione; per avere le altre possiamo usare il teorema degli scarti complementari partendo da quella trovata dall'algoritmo del simplesso.

Note

- W^h è direzione di crescita perché

  $$\overline{y}_B^{\mathsf{t}} = c^{\mathsf{t}} A_B^{-1} \implies \overline{y}_h = c^{\mathsf{t}} (A_B^{-1})^h = c^{\mathsf{t}}(-W^h)$$

  e

  $$\overline{y}_h < 0 \;\wedge\; \overline{y}_h = c \cdot (-W^h) \implies c \cdot W^h > 0;$$

- per determinare se W^h è una direzione di recessione calcoliamo $A_i W^h \leq 0$ solo $\forall i \in N$ (anziché per tutte le righe di A) perché:

  $$A_i W^h = -A_i(-W^h) = -A_i(A^{-1})^h = \begin{cases} -1 & \text{se } i = h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

  quindi per gli indici della base la condizione è sempre verificata;

- per quali valori di θ $\overline{x} + \theta W^h$ rimane in P?

  $$A_i(\overline{x} + \theta W^h) \leq b_i$$

  caso $i = h$ sempre:

  $$A_i(\overline{x} + \theta W^h) = \underbrace{A_i\overline{x}}_{b_i} + \theta \underbrace{A_i W^h}_{-1} = b_i - \theta \leq b_i;$$

  caso $i \in B \setminus \{h\}$ sempre:

  $$b_i + \theta \cdot 0 \leq b_i;$$

  caso $i \in N$:

  $$\underbrace{A_i\overline{x}}_{\leq b_i} + \underset{>0}{\theta} A_i W^h \leq b_i$$

  se $A_i W^h \leq 0$ vale sempre, altrimenti:

  $$A_i\overline{x} + \theta A_i W^h \leq b_i \iff \frac{b_i - A_i\overline{x}}{A_i W^h} \geq \theta.$$

  Per rispettare questo vincolo per tutti gli i, θ deve essere minore o uguale al minimo che il rapporto assume al variare di i (che è il criterio con cui scegliamo θ al passo 4);

- geometricamente, $\overline{y}$ è ammissibile se e solo se c è in $\operatorname{cono}\{A_i \mid i \in B\}$. I candidati ad essere indici uscenti (tra cui va scelto il minimo) sono quelli corrispondenti alle righe di cui va cambiato il segno affinché c stia nel cono.