Caratterizzazione algebrica dei vertici (PL)

Dato il problema con regione ammissibile P:

$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove il vincolo $x \geq 0$ non provoca perdita di generalità e garantisce che $\operatorname{lineal} P = \{0\}$, vale che $\overline{x}$ è un vertice di P se e solo se è soluzione di base primale *ammissibile* per una qualche base di P.

Condizione sufficiente di ottimalità

Sia $\overline{x}$ una soluzione di base primale ammissibile relativa alla base B. Se la soluzione di base duale $\overline{y}$ relativa a B è ammissibile, allora $\overline{x}$ è ottima per il primale e $\overline{y}$ per il duale.

Condizione sufficiente, ma necessaria solo se non sono degeneri. Se una soluzione di base è degenere, è soluzione di più di una base; una di queste soddisfa la condizione.

Dimostrazione

Due soluzioni di base $\overline{x}$ e $\overline{y}$ relative alla stessa base sono sempre in scarti complementari:

$$\overline{y} \cdot (b - A\overline{x}) = \begin{pmatrix} \overline{y}_B \\ \overline{y}_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_B - A_B\overline{x} \\ b_N - A_N\overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b_N - A_N\overline{x} \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi per il teorema degli scarti complementari se sono ammissibili sono anche ottime.