Piani di taglio di Gomory

Dato un problema di PLI nella forma:

$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

con $\overline{x}$ soluzione di base ottima del rilassamento continuo relativa alla base B, e

$$A = \begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N \qquad \tilde{b} = \overline{x}_B,$$

allora se $\exists r \in B \;.\; \tilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i \in N} \{\tilde{a}_{ri}\} x_i \geq \{\tilde{b}_r\} \qquad \text{(dove } \{x\} = x - \lfloor x \rfloor\text{)}$$

è un piano di taglio (taglio di Gomory) per il problema.

Tutti i problemi di PLI si possono convertire nella forma richiesta aggiungendo variabili di scarto.

Gli indici sono sempre riferiti alla posizione nella matrice originale.

Base

Consideriamo le colonne invece delle righe nella scelta della base perché i vincoli in questa forma sono equivalenti al duale di un problema in forma canonica con matrice A^{t}:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \overset{\text{rinominiamo}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{cases} Ay = c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \overset{\text{trasposta}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{cases} y^{\mathsf{t}} A^{\mathsf{t}} = c^{\mathsf{t}} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Per trovare la base, partiamo dalla soluzione $\overline{x}$ del rilassamento continuo (dove $\overline{x}$ è un vertice). Le componenti non nulle di $\overline{x}$ corrispondono ad indici di base (se non bastano a formarne una si scelgono anche componenti nulle).