Modello per cammino minimo tra una coppia di nodi

Sia $G = (N, A)$ un grafo *orientato*. Il modello di ottimizzazione che trova il cammino minimo da $s \in N$ a $t \in N$ è il seguente:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}c_{ij} & \\ \displaystyle\sum_{(i,s)\in A} x_{is} - \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = -1 & \text{un'unità di flusso in uscita da } s \\ \displaystyle\sum_{(i,t)\in A} x_{it} - \sum_{(t,j)\in A} x_{tj} = 1 & \text{un'unità di flusso in entrata in } t \\ \displaystyle\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = 0 & \forall k \in N \setminus \{s, t\} \\ x_{ij} \in \mathbb{N} & \forall i, j \in N \end{cases}$$

dove il *flusso* x_{ij} indica quante volte viene attraversato l'arco (i, j).

È possibile scrivere il modello in forma più compatta usando una matrice di incidenza E:

$$\begin{cases} \min\ c \cdot x \\ Ex = b \\ x \in \mathbb{N}^{|A|} \end{cases}$$

dove c è il vettore dei costi, x il vettore dei flussi, b il vettore dei bilanci desiderati:

$$b_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$