Tagli e flusso massimo

Un taglio ammissibile per il problema del flusso massimo è un taglio (N_s, N_t) tale che $s \in N_s$ e $t \in N_t$. Definiamo:

archi diretti del taglio $A^+ = \{(i,j) \in A \mid i \in N_s, j \in N_t\}$

archi inversi del taglio $A^+ = \{(i,j) \in A \mid i \in N_t, j \in N_s\}$

capacità del taglio $u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+} u_{ij}$

flusso sul taglio $x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A^-} x_{ij}$

Vale che, se x è un flusso ammissibile e v è il suo valore:

- $v = x(N_s, N_t)$
- $x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t)$

Dimostrazione

a) Consideriamo i vincoli di bilancio corrispondenti ai nodi di N_t:

$$\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = 0 \quad \forall\ k \in N_t \setminus \{t\}$$

$$\sum_{(i,t)\in A} x_{it} - \sum_{(t,j)\in A} x_{tj} = v$$

Sommando tra loro le equazioni, si ottiene $v = x(N_s, N_t)$.

b) Utilizzando i vincoli di capacità $0 \leq x \leq u$, si ottiene

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A^-} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in A^+} u_{ij} = u(N_s, N_t).$$