# Teorema fondamentale della programmazione lineare

Dato un problema $\mathcal{P}$ in forma canonica

$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \end{cases}$$

e una decomposizione di $P = \text{conv}\{v_1, \ldots, v_m\} + \text{cono}\{d_1, \ldots, d_q\}$,

- il valore ottimo di $\mathcal{P}$ è finito se e solo se $\forall j \in \{1, \ldots, q\}\ .\ c \cdot d_j \leq 0$ (ovvero non ci sono direzioni di crescita tra quelle di recessione), e
- se il valore ottimo è finito, allora $\exists i \in \{1, \ldots, m\}\ .\ v_i$ è una soluzione ottima di $\mathcal{P}$ (potrebbero esserci comunque soluzioni ottime che non sono un vertice).

**Corollario:** se $P$ è limitato, allora un suo vertice è soluzione ottima di $\mathcal{P}$.

Per il lemma di Farkas, si può riformulare il teorema come: $\mathcal{P}$ ammette soluzione se e solo se la regione ammissibile del problema duale non è vuota.