

Condizione di ottimalità per il problema del flusso minimo

Associamo ad ogni flusso x il grafo residuo $G(x) = (N, A')$ in cui A' è

- se $(i, j) \in A$ con $x_{ij} < u_{ij}$, allora $(i, j) \in A(x)$ con $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ e $c'_{ij} = c_{ij}$;
- se $(i, j) \in A$ con $x_{ij} > 0$, allora $(j, i) \in A(x)$ con $r_{ji} = x_{ij}$ e $c'_{ji} = -c_{ij}$.

Il flusso ammissibile x è ottimo se e solo se in $G(x)$ non esistono cicli orientati (*ciclo aumentante*) di costo negativo.

Il costo è negativo negli archi aggiunti con il secondo caso perché attraversarli significa rimuovere flusso dall'arco originale. I bilanci si mantengono perché troviamo un ciclo.