

Algoritmo dei cammini minimi successivi (flusso minimo)

Manteniamo uno pseudoflusso minimale, e ad ogni iterazione riduciamo il suo sbilanciamento.

Utilizziamo come pseudoflusso iniziale:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij} \geq 0 \\ u_{ij} & \text{se } c_{ij} < 0 \end{cases}$$

1. se $E_x = \emptyset$ stop (x è ottimo);
2. aggiungi a $G(x)$ un nodo r con archi uscenti $(r, i) \forall i \in E_x$ con costo $c_{ri} = 0$ e capacità residua $r_{ri} = +\infty$.
3. trova un albero dei cammini minimi T radicato in r su $G(x)$;
4. trova $\arg \min_{i \in D_x} \pi_i$; se $\pi_t = +\infty$ stop (non esistono flussi ammissibili);
5. indica con P il cammino da r a t in T ; P passa per un nodo $s \in E_x$ per come abbiamo inserito r ;
6. aggiorna x spedendo $\delta = \min\{e_x(s), -e_x(t), \min_{(i,j) \in P} r_{ij}\}$ lungo P e ripeti.

Correttezza

- lo pseudoflusso iniziale è minimale perché non ha cicli aumentanti di costo negativo in quanto gli archi del suo grafo residuo non hanno costi negativi;
- l'algoritmo termina perché $g(x)$ è intero e diminuisce ad ogni iterazione di almeno 1;
- lo pseudoflusso calcolato ad ogni iterazione rimane minimale perché spediamo flusso sempre attraverso un cammino di costo minimo da un nodo in E_x a un nodo in D_x ;
- all'ultima iterazione lo pseudoflusso minimale è ammissibile, quindi è un flusso minimo.